Российская Академия Наук
Институт философии

В.И. Шалак

О ПОНЯТИИ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ

Москва
2007

УДК 162.5
ББК 87.4
Ш–18

В авторской редакции

Рецензенты:

доктор филос. наук *И.А. Герасимова*
кандидат филос. наук *В.О. Шангин*

Ш–18 **Шалак В.И.** О понятии логического следования [Текст] / В. И. Шалак ; Рос. акад. наук, Ин-т философии. – М. : ИФ РАН, 2007. – 168 с. ; 20 см. – Библиогр.: с. 165–168. – 500 экз. – ISBN 978-5-9540-0098-6.

Монография посвящена анализу философских оснований логики. В первую очередь это касается понятия истины и понятия логического следования. Автор показывает ограниченность философских предпосылок современной логики и предлагает альтернативный подход к ее построению.

Книга предназначена для всех, кто интересуется проблемами современной философской логики.

ISBN 978-5-9540-0098-6

Книга посвящается

моему учителю логики

Владимиру Александровичу Смирнову

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Согласно европейской традиции, возникновение науки мы связываем с именами философов Ионийской школы – Фалеса, Анаксимандра, Анаксимена. Если ранее все происходившее вокруг объясняли волею и прихотями капризных богов, то им первым пришла в голову мысль, что мир можно понять. Для этого достаточно выделить в нем одно или несколько простых начал и все остальное объяснить с их помощью. Фалес единственным началом посчитал воду. К этому его могли подтолкнуть наблюдения за превращениями воды в газообразное и твердое состояния, наблюдения за тем, что соль и другие вещества растворяются в воде и как бы в ней исчезают, наблюдения за тем, что вода необходима для жизни и пр. Кажущаяся наивность взглядов Фалеса не должна заслонять от нас главного – он сумел взглянуть на мир с совершенно новой точки зрения. Его озарила великая идея, что мир познаваем!

После Фалеса был Анаксимандр, который не захотел связывать первоначало ни с одним из известных веществ и назвал его апейроном – неопределенным и безграничным. Анаксимен провозгласил первоначалом подвижный воздух и первым выдвинул теорию физических переходов. К тому времени люди уже давно владели искусством счета и применяли его в своей практике, но когда оказалось, что даже гармония неуловимых звуков музыки может быть описана с помощью чисел, это их изумило. Сами вещи суть числа – заключили пифагорейцы.

Столь разные объяснения устройства окружающего мира не могли не вызвать скептического к себе отношения. Лишь умопостигаемое бытие, а не данные органов чувств, обладает действительной реальностью. Элеец Парменид приходит к выводу, что бытие вечно, едино и неподвижно, и знание возможно только о нем, а все что дано в чувственном опыте *«суть мнения смертных»*, проводя, таким образом, различие между знанием и мнением. Защищая взгляды своего учителя от нападок тех, кто его высмеивал, Зенон формулирует свои знаменитые апории, в которых доказывает, что признание существования движения и многого влечет за собой более странные последствия, чем признание существования неподвижности и единого. Учение элеатов произвело очень сильное впечатление на современников и до сих пор приковывает к себе наше внимание. Платон вложил в уста Сократа следующие слова: *«К Мелиссу и всем прочим, кто полагает универсум единым и неподвижным, я испытываю почтение и боюсь, как бы нам не опошлить [их учения] своим разбором, и все же [ко всем ним вместе взятым] я испытываю меньше почтения, чем к одному Пармениду. Парменид же мне кажется, по слову Гомера, внушающим благоговение и в то же время трепет»* [36, С. 275].

Современником Парменида был Гераклит из Эфеса. Он не утруждал себя доказательствами, а просто утверждал, что нет ничего застывшего и неподвижного, что все находится в становлении, что *«этот космос, один и тот же для всех, не создал никто из богов, никто из людей, но он всегда был, есть и будет вечно живой огонь, мерно возгорающийся, мерно угасающий»* [36, С. 217]. Афористичность языка сильно воздействовала на всех, кто знакомился с учением Гераклита, но в этом была и его слабость. «*Гераклит ... предоставил нам догадываться [о смысле своих слов], не потрудившись сделать свою речь ясной для нас*» [36, С. 180] – пишет Плотин. Тем не менее, главный посыл учения Гераклита был понят, и от него уже никто не мог отмахнуться.

Учения Парменида и Гераклита во многом определили будущие направления развития всей европейской философии. Первые законченные философские системы мы находим у Платона и Аристотеля. Они взялись навести порядок в многообразии существовавших точек зрения на устройство мироздания. В числе прочих ими были даны ответы на вопросы, что есть истина, что есть знание и каковы его объекты? Оба мыслителя признавали реальность чувственного, подверженного изменению мира Гераклита, но в то же время не могли отмахнуться и от учения Парменида, принимая его различение знания и мнения. Это нашло отражение во взглядах на объекты и цели познания. Для Платона ими являлись вечные идеи, которым чувственный мир явлений всего лишь «причастен». Аристотель не принимал теории идей, но создал учение о формах, существующих посредством вещей. И для Платона, и для Аристотеля познание направлено на то, что не подвержено изменению во времени. Рассуждая об истине и изменчивом мире явлений, Аристотель заключает, что «*если все находится в движении, то ничто не может быть истинным; тогда, значит, все было бы ложно*» [Метафизика, IV, 8, 1012b 20]. Отсюда он делает удивительно нелогичный вывод: «*Многое же хотя и истинно и существует, но может быть и иным. Ясно поэтому, что о нем нет науки*» [Вторая Аналитика, I, 33, 88b 30]. Более последовательным было бы заключить, что если принятие теоретической конструкции под названием «понятие истины» влечет за собой отказ от возможности познания признаваемого нами действительным изменяющегося мира и ограничивает его сферу лишь неизменным парменидовским бытием, то мы должны отказаться именно от этой теоретической конструкции. Однако этого не случилось, и возобладала абсурдная точка зрения – *тем хуже мирозданию, что оно не поддается описанию в терминах истинности.*

Исторические судьбы учений Платона и Аристотеля, их огромный авторитет привели к тому, что мы оказались заложниками этих взглядов. Возникло учение о понятиях и правилах их определения. Возникла теория силлогистических рассуждений, базирующаяся на отношениях между объемами понятий. Это было признано единственно правильным представлением окружающего мира и стало стандартом, которому обучали в школах и университетах, которому должна была следовать и в результате следовала наука. Последователи гераклитовской традиции были лишены адекватного понятийного аппарата для выражения свойств изменяющегося мира. Они были вынуждены пытаться доносить свои идеи, формулируя их на навязанном им языке, принципиально не предназначенным для этого. Стоит ли после этого удивляться, что современная наука, как заметил А.М. Анисов, по своей сути является парменидовской. Заложницей и последовательным проводником этой весьма ограниченной точки зрения стала логика. Но что есть Логика?

Именно эти вопросы и интересовали меня при написании настоящей книги. Многое из изложенного в ней в той или иной форме неоднократно обсуждалось с моими коллегами по сектору логики Института философии РАН – д.ф.н. А.С.Карпенко, д.ф.н. А.М.Анисовым, д.ф.н.

В.Л.Васюковым, к.ф.н. С.А.Павловым. Их дружеская критика помогала лучше увидеть слабые места в аргументации и корректировать собственные взгляды. Я хочу поблагодарить д.ф.н. А.А.Крушинского, который помог мне новыми глазами увидеть мир логики древнего Китая. Особая благодарность к.ф.н. Е.В.Левенец. Она была моим первым критиком и очень помогла в историко-философском осмыслении проблемы.

Я очень сожалею, что не могу выразить благодарность *Владимиру Александровичу Смирнову*, с которым познакомился 27 лет назад и который был моим главным учителем логики, а потому просто посвящаю ему эту книгу.

Аристотель, а вслед за ним и весь мир приняли за неоспоримую истину, что применение правил дедуктивного вывода гарантирует получение заключений, не уступающих по надежности посылкам. Иначе говоря, если посылки истинны, то истинны и заключения.

М.Клайн

Общее согласие – самое дурное предзнаменование в делах разума…

Ф.Бэкон

I. ВВЕДЕНИЕ

Наиболее широко применимой и самой глубоко изученной системой современной логики является классическая. Практически все другие системы логики, так или иначе, на синтаксическом или семантическом уровне сводимы к ней. В настоящей книге мы выскажем ряд критических замечаний в адрес классической логики, которые будут касаться философских предпосылок, лежащих в ее основе. Важность критики именно философских предпосылок заключается в том, что в системе научного знания логика занимает особое выделенное место – на ней базируется вся остальная наука. Логика определяет то, в какие формы нам позволено облекать свои мысли, если мы хотим быть поняты другими людьми, а отношение логического следования определяет то, в какие формы нам позволено облекать свою аргументацию, если мы хотим, чтобы наши выводы были приняты другими людьми. В этом заключается необычайно важная роль, которую играет логика в процессе познания, и в этом причина ее необычайной косности как условия сохранения достигнутого знания. В то же время, очевидно, что различные области научного знания развиваются неравномерно. Меняются представления о свойствах времени и пространства и о связи между ними, меняются представления о свойствах и формах материи. Появляются совершенно новые области научного исследования. Все это требует постоянного переосмысления, которое и происходит, но уже в рамках философского знания. В этой ситуации появляется опасность возникновения несоответствия общих философских предпосылок логики новым научным реалиям. Из полезного инструмента логика может превратиться в тормоз развития науки.

Начало современного этапа развития логики мы связываем с работами Г.Фреге, Г.Пеано, Б.Рассела и А.Уайтхеда. Их труды послужили своеобразным эталоном того, как и в каком направлении следует ее развивать. Удобное символьное представление изучаемых объектов повлекло за собой широкое применение математических методов, что не замедлило сказаться получением ряда фундаментальных теорем. Особо следует отметить результаты А.Тарского, К.Геделя, Т.Сколема, А.Черча, А.Тьюринга, С.Клини. Со всеми основаниями можно утверждать, что в XX в. логика принадлежала к числу наиболее бурно и плодотворно развивавшихся наук. Это привлекало к ней внимание и обеспечивало приток умов. Однако к концу века работающие в ней ученые все чаще стали задумываться об основаниях своей науки.

«... *мы должны обратить внимание на главную тенденцию развития логики в конце XX и начале XXI века. Как сто лет назад остро встал вопрос об основаниях математики, так сейчас стоит вопрос об основаниях самой логики, в связи с чем обсуждаются следующие проблемы:*

(i) Что есть логическое следование?

(ii) Что есть логические понятия (операции)?

(iii) Что есть логическая система?

(vi) Что есть логика?» [19, с. 71].

То, что казалось очевидным в начале XX в., к концу его все чаще стали ставить под сомнение, появилось ощущение размывания самого предмета логики. Во время одного из докладов, который пришлось делать автору, присутствовавший в аудитории логик-математик настойчиво пытался уговорить его вместо терминов «истина» и «ложь» использовать «единичку» и «ноль». Убедить, что истина – это вовсе не единичка, а ложь – не ноль, так и не удалось. Подмена логической проблематики проблематикой оперирования с одними лишь символами губительна для логики. Она значительно облегчает доступ в сферу логического творчества, но саму логику делает бессмысленной.

Среди логиков сейчас уже трудно найти хотя бы одного, кто одинаково хорошо ориентировался бы во всех разделах своей науки и был постоянно в курсе полученных в них результатов. Время таких энциклопедистов прошло. Единственное, что нас объединяет и не дает развалиться самому зданию логики, – это ее основания.

Мы разделяем друг с другом ряд общих строго уточненных понятий и стараемся строить, исходя из них, свою науку. Однако всякая попытка критического переосмысления философских оснований логики наталкивается на определенные трудности.

«*В текстах и трактатах по истории философии мы обычно находим информацию лишь о том, какие тезисы или мнения отстаивали те или иные философы в разные времена. Все еще слишком редко встречаются сколько-нибудь интересные попытки показать, почему философы принимали именно такие воззрения и почему им казалось важным подчеркивать эти воззрения в качестве составных частей своих учений... Часто, хотя и не всегда, ответы на эти вопросы зависят от выявления концептуальных допущений, которые явно или неявно принимает тот или иной мыслитель. Эти концептуальные допущения и склонность к использованию определенных понятий часто разделяются всеми или большинством мыслителей определенного периода или даже целой культуры*» [38, с. 355].

Бурное развитие логики в конце XIX – начале XX в., когда именно и были заново сформулированы ее основные понятия, происходило в ориентации на решение проблем, возникших в основаниях математики. Философия математики с ее представлениями об объектах и методах математики наложила на логику неизгладимый отпечаток. Можно лишь приветствовать то, что в современной логике начали широко применяться математические методы, но определенные сомнения в прочности ее фундамента вызывает то, что главной преследуемой целью было – подвести прочные основания под здание математики. То, что с определенными оговорками справедливо лишь для математических рассуждений, посчитали универсальными характеристиками и распространили на всю логику. Философская логика, изначально ориентированная на решение гораздо более широкого круга проблем, была лишена своей специфики.

Логики уже начали сталкиваться с проблемами, аналогичными тем, которые возникли при попытках применить точные методы современной математики в области социальных и гуманитарных наук. Хорошо известно, например, что классическая логика плохо применима для анализа рассуждений в естественном языке. Результат в сравнении с затраченными усилиями невелик. Бурное размножение различных неклассических логик, и их применение к частным задачам проблемы не решило. Связано это с тем, что основания современной логики содержат ненужные жесткие ограничения, препятствующие ее широкому применению в областях, природа которых в корне отлична от природы математического знания. Именно по этой причине и стали все чаще задаваться вопросами, насколько естественно то, что в логике принимается как само собой разумеющееся? Почему вообще мы приняли те или иные определения базисных понятий логики? Что они нам дают и чего лишают?

Сердцем классической логики являются понятие истины и понятие логического следования. Именно они и будут нас интересовать в первую очередь. Автор отдает себе отчет в том, что многое из сказанного далее не имеет доказательной силы, а скорее отражает его собственную точку зрения.

II. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛЕДОВАНИЯ

Критерий истинности, сходным образом сформулированный Платоном *«... тот, кто говорит о вещах в соответствии с тем, каковы они есть, говорит истину, тот же, кто говорит о них иначе, – лжет...»* [Кратил, 385b] и Аристотелем *«... говорить о сущем, что его нет, или о не-сущем, что оно есть, – значит говорить ложное; а говорить о том, что сущее есть и не-сущее не есть, – значит говорить истинное»* [Метафизика, IV, 7, 1011b 25], считается классическим и был, по историческим меркам относительно недавно, уточнен А.Тарским. С использование этого критерия был доказан ряд фундаментальных теорем, но все-таки не он и не само понятие истины является ядром логики.

Понимая логику как науку, изучающую законы правильных рассуждений, **центральным ее понятием справедливо считается понятие логического следования**. В 1936 г. оно также было уточнено А.Тарским [35, 64]. Именно это отношение определяет то, какие способы рассуждений принимаются в качестве правильных, а какие не удостаиваются этого звания. Логический статус этого понятия столь велик, что саму *«Логику можно определить как науку о хороших способах рассуждений. Под "хорошими" способами рассуждений при этом можно понимать такие, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты»* [24, с. 5].

Трудно переоценить значение, которое имеет принимаемое понятие логического следования, для развития не только науки, но и всей человеческой культуры. Хотелось бы, чтобы это понятие было в определенном смысле *единственно верным*. От того, какие виды умозаключений считаются доказательными, зависят способы аргументации в судах, способы общения в учебных классах, способы передачи знания от одного поколения к другому, способы формулировки научных теорий и пр. Если мы в чем-то ошиблись при выборе отношения логического следования, то в нашей культуре обязательно должны были появиться изъяны, которых мы просто не имеем возможности заметить из-за уже принятой понятийной сетки.

Перейдем теперь непосредственно к анализу определения логического следования в классической логике. Некоторое умозаключение считается правильным, если и только если при истинности посылок оно гарантирует истинность заключений. Вроде бы ничего разумного возразить против этого нельзя. Действительно, кому придет в голову пользоваться рассуждениями, которые могут привести от истины ко лжи? Сформулируем классическое определение следования более строго: «*Из множества формул Σ следует формула А, если и только если в каждой модели* **M**, *в которой истинны все формулы множества Σ, будет истинна и формула А*». Кратко, с использованием общепринятой логической символики, это можно записать в виде:

$$\Sigma \models A \Leftrightarrow \forall M(\forall B(B \in \Sigma \Rightarrow M[B]=\mathrm{true}) \Rightarrow M[A]=\mathrm{true})$$

где M[A]=true означает, что в модели M истинна формула A.

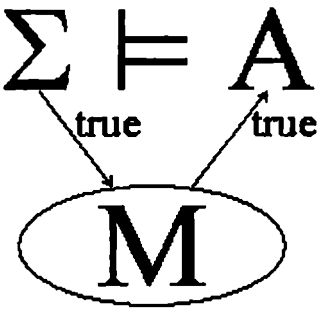

Рис. 1

Специфической чертой данного определения следования является то, что отношение между Σ и A устанавливается не *напрямую*, а посредством их соотнесения с моделью **M**. Непосредственная связь между множеством формул Σ и формулой A разрывается и вводится *посредник* – свойство *быть истинным в модели **M***.

Натренированный глаз логика сразу замечает, что, благодаря такому разрыву, в случае несуществования ни одной модели, в которой истинны все формулы множества Σ, из него логически следует любая формула, т.е. отношение следования становится тривиальным. Мы к этому уже как-то привыкли и даже считаем естественным.

Определение логического следования классической логики имеет еще один скрытый недостаток. *В метаязыке этого основополагающего определения мы уже принимаем классическую логику, правила которой как раз и хотим обосновать.* То есть имеются основания подозревать нечто похожее на порочный круг в определении.

При кажущейся естественности этого определения мы все-таки хотим найти ответ на вопрос, откуда оно взялось? Каково его обоснование? Можно ли вообще называть его определением логического следования? Нельзя согласиться с тем, что «*Понятие истины напрямую связано с пониманием логического следования, данного Тарским, а это, в свою очередь, приводит к объектам, которые мы называем "логическими законами": последние суть сохраняющие истину выводы*» [19, с. 74]. Легко проверить, что из принятого критерия истинности предложений вовсе не следует, что мы должны принять именно такое определение отношения логического следования. Понятие истины изучают и активно используют в логике, но само оно не является логическим. Обоснование его лежит вне логики – в теории познания. В то же время понятие логического следования является внутрилогическим понятием и потому обосновываться должно исходя из общих внутренних принципов логики. Оно не должно зависеть ни от каких явно или неявно принимаемых нами внешних предпосылок. Но как в таком случае отнестись к тому, что в определении следования участвуют лишь те модели, в которых истинны посылки умозаключения? Разве мы не подчеркиваем постоянно, что законы логики не зависят от конкретного содержания и потому обладают свойством универсальной применимости, но при этом, говоря о следовании, почему-то отступаем от данного принципа? Но факт остается фактом, что классический критерий истинности предложений используется в одной связке с классическим же определением следования. А раз так, то должно быть какое-то связующее звено, неявная предпосылка, которые и вынуждают нас делать это.

В поисках ответа обратимся к уже упоминавшейся классической работе А.Тарского [35]. Может показаться странным, что в ней не предлагается никакой серьезной мотивации даваемым определениям. В одном месте А.Тарский ссылается на «*рассуждения интуитивного свойства*» и «*естественную интуицию*»:

«Исходным пунктом для нас будут определенные рассуждения интуитивного свойства. Примем во внимание произвольный класс предложений К и произвольное предложение X, которое следует из предложений этого класса. С точки зрения естественной интуиции очевидно, что не может случится так, что все предложения класса К были бы истинны, а предложение X при этом было ложным».

В другом месте говорит об «*обыденном использовании понятия следования*»:

«Скажем, что предложение X логически следует из предложений класса К тогда и только тогда, когда каждая модель класса К является одновременно моделью предложения X.

У меня складывается впечатление, что каждый, кто поймет содержание вышеприведенного определения, признает, что оно содержит достаточно интуиции, проявляющейся в обыденном использовании понятия следования».

Для центрального понятия, лежащего в основании логики, такого рода аргументация со ссылкой на его «*обыденное использование*» должна показаться, по крайней мере, странной. Понятно, что «*обыденное использование*» не является врожденным. Оно приобретено, но далеко не всеми людьми, а лишь теми, кто получил специальное образование. В обычной жизни нарушение правил логики является не исключением, а скорее нормой. Поэтому ссылка в обосновании определения на «*обыденное использование*» заключает в себе порочный круг – «*мы принимаем это определение следования, потому что ему нас учили в школе*». К сожалению, в работах и других логиков лишь констатируются свойства уже принятого отношения логического следования, но никакого обоснования не предлагается.

«Какова бы ни была структура допускаемых способов рассуждения, в логике к ним предъявляется одно обязательное требование: они должны воспроизводить отношение логического следования, т.е. обеспечивать при истинности посылок истинность заключения» [32, с. 13].

Известный историк математики М.Клайн по поводу классического определения следования пишет следующее.

«Аристотель, а вслед за ним и весь мир приняли за неоспоримую истину, что применение правил дедуктивного вывода к любым посылкам гарантирует получение заключений, не уступающих по надежности посылкам. Иначе говоря, если посылки истинны, то истинны и заключения. Следует отметить, в особенности для обсуждения в дальнейшем, что Аристотель абстрагировал правила дедуктивной логики из рассуждений, которыми уже тогда широко пользовались математики. Дедуктивная логика – дитя математики» [21, с. 30].

Приведенные слова могут вызвать лишь улыбку. Хотелось бы спросить, когда и где проводился референдум, на котором была принята данная «*неоспоримая истина*», и был ли кворум? Мы не приписываем взглядам самого М.Клайна сказанное в этой цитате, так как он всего констатирует сложившееся в научной среде понимание логического следования, а не высказывает свое к нему отношение.

В то время как по вопросу разнообразных критериев истинности (корреспондентского, когерентного, конструктивного, прагматического и пр.) философами и логиками написано много книг и статей, отношение к понятию логического следования более сдержанное. Если и пишут о следовании и определении Тарского, то лишь критикуют отдельные его недостатки и пытаются дать более удачную формулировку, но не задаются вопросами о природе этого отношения, его философских корнях.

Классическое понятие логического следования существенным образом опирается на понятие истины. А.Тарский дал всего лишь современное уточнение того отношения между предложениями языка, которое в терминах истины и лжи подробно обсуждал Аристотель во второй книге «Первой аналитики». Но для того чтобы понятие истины было положено в основу определения следования, прежде должно было возникнуть особое ценностное отношение к нему. Это отношение должно было возникнуть не в логике, а в свойственной конкретной культуре системе общих философских взглядов на устройство мира и место в нем человека. Именно в системе этих взглядов понятию истинности как соответствию действительности была приписана особая познавательная ценность. И лишь затем формы умозаключений, сохраняющие свойство предложений быть истинными, стали предметом исследования в логике.

Нет оснований полагать, что выбор понятия истины был безальтернативным. В философии имеются и другие понятия, имеющие познавательную ценность. В качестве примера можно привести понятие пользы, лежащее в основе прагматической концепции истинности, и его использование при моделировании рассуждений современными робототехническими устройствами. Другим примером является понятие прекрасного. В устах Коперника и Кеплера одним из аргументов в пользу принятия гелиоцентрической системы мира была именно ее красота в сравнении с геоцентрической картиной Птолемея. Не чужд эстетических аргументов был и И.Ньютон. Примеры можно продолжить.

Приведенная выше цитата М.Клайна интересна тем, что в ней понятие логического следования совершенно недвусмысленно связывается с именем Аристотеля и математикой. Это неудивительно. Вряд ли необходимо лишний раз напоминать, что греческая культура и, в частности, философия оказали определяющее влияние на развитие европейской мысли. Генезис многих понятий современной логики мы можем проследить вглубь веков вплоть до античности.

«Возникновение древнегреческой философии и доказательной науки – процесс уникальный как во времени, так и в пространстве. Никогда и нигде он больше не повторился. ... всякий раз, когда в какой-либо цивилизации прошлого историки отмечали использование идеи математического доказательства, обнаруживалось ее греческое происхождение. В литературе для обозначения описываемых событий применяется термин "гре-

ческое чудо" – редкий пример, когда ученые используют слово "чудо" в положительном смысле» [1, с. 17].

Чтобы лучше понять роль и значение понятия истины в определении логического следования, посмотрим, каковы были взгляды древних греков на познание и его цели.

III. ИСТОРИЧЕСКАЯ РЕТРОСПЕКТИВА

Следование, будучи по своей природе семантическим обоснованием правильных рассуждений, может быть объяснено из того, каким целям должны служить правильные рассуждения, и к каким объектам они могут быть применены. Ответ на эти вопросы можно получить лишь обратившись к философским взглядам родоначальников той логики, которая нас интересует.

Из древнегреческих философов в наиболее полном объеме до нас дошли труды Платона и Аристотеля. Патристика в философии донесла до нас взгляды Платона, а схоласты преуспели в канонизировании Аристотеля, труды которого стали для них второй Библией. Как и Библию, написанное Аристотелем можно было толковать, но нельзя было сомневаться в истинности сказанного. Если к этому еще вспомнить об исторически первой стройной и законченной логической системе, построенной Аристотелем, то становится ясным, почему в итоге взгляды обоих философов вошли в плоть и кровь всей европейской культуры.

Платон, с его теорией идей, и Аристотель находились под сильным впечатлением от стройности и красоты математического знания. Они считали, что именно математическое знание является образцом того, что вообще можно называть знанием. Это привело их к различению *знания* и *мнения*, которые представляют собой не только разные способности, но и направлены на разные объекты. Если знание имеет своим объектом умопостигаемое, существующее само по себе, вечное, вневременное, то объектами мнения является данное в ощущениях и потому изменчивое. Парадокс лжеца, апории Зенона как бы служили подтверждением тому, что попытки рассуждать о мире явлений приводят к противоречиям. Вот как пишет об этом Б. Рассел, излагая теорию идей Платона:

«Человек, обладающий знанием, имеет знание о чем-то, то есть о чем-то, что существует, так как то, что не существует, есть ничто. Таким образом, знание непогрешимо, поскольку логически невозможно, чтобы оно было ошибочным. Но мнение может быть ошибочным. Как же это возможно? Не может быть мнения о том, чего нет, потому что это невозможно; не может быть мнения о том, что есть, так как это было бы знанием. Поэтому мнение должно быть одновременно о том, что есть и чего нет. ... Все отдельные чувственные объекты, как утверждает Платон, обладают этим противоречивым характером; они являются, таким образом, промежуточными между бытием и небытием и пригодны в качестве предметов мнения, но не знания» [30, с. 167–168].

Об этом же говорит и Я.Хинтикка, анализируя взгляды Платона и Аристотеля на познание и его объекты.

«Хотя позиция Аристотеля по отношению к различию между знанием и верой [мнением] совершенно отлична от платоновской, он тоже приходит к выводу о том, что знание и вера [мнение] должны иметь различные объекты, если мы хотим избежать двусмысленности...

Поэтому вполне понятны явные утверждения Аристотеля, что мы можем иметь знание лишь о том, что неуничтожимо и неизменно» [38, с. 368].

«... здесь мы действительно имеем дело с тенденцией, общей многим греческим мыслителям.

Наиболее характерной чертой этой тенденции является широкое распространение среди греков учения о том, что подлинное знание возможно только о том, что вечно или, по крайней мере, неизменно» [37, с. 404].

«... Аристотель утверждает, что Платон принимал учение Гераклита о том, что "все чувственно воспринимаемое постоянно течет, а знания о нем нет". Справедливо это или нет, однако в сочинениях самого Платона можно обнаружить похожие рассуждения» [37, с. 409–410].

«Аристотель также соглашается с тем, что если бы все вещи находились в покое, то "одно и то же было бы всегда истинным и одно и то же – всегда ложным... А если все находится в движении, то ничто не было бы истинным; тогда, значит, все было бы ложно..."» (Метафизика, IV, 8, 1012b 24-28)» [37, с. 410].

«...становится понятным также значение неизменности форм для Платона. Одна из наиболее важных функций форм состояла в том, что они служили абсолютно неизменными объектами познания и благодаря этому обеспечивали возможность подлинного знания.

...между внешне различными и даже противоположными проблемами, которые беспокоили Платона и Аристотеля, имеется тесная связь. С одной стороны, они уделяют большое внимание той идее, что "познание есть восприятие"... С другой стороны, их привле-

кала та идея, что мы можем иметь знание лишь о том, что никогда не изменяется» [37, с. 411].

Следствием принятия данной точки зрения является неизменность и накопительный характер знания.

«Как только знание стало объектом философской рефлексии, возобладала позиция, согласно которой знание об изменяющихся вещах невозможно. Это хорошо известный факт. Как-то меньше внимания обращается на то, что отсюда следует вывод о неизменности знания. Меняются мнения, а не знания, соответствующие неподвижному бытию. Можно знать больше или меньше, но нельзя назвать знанием то, что требует исправления, коррекции, внесения изменений. Можно добавить к имеющемуся знанию и можно забыть то, что знал раньше, но знания остаются сами собой. Вспомнив забытое, мы вспомним то же самое, а не иное» [2, с. 129].

Остановимся на этих цитатах. Из них становится совершенно ясно, почему отношение логического следования понималось Платоном и Аристотелем как отношение, сохраняющее истинность от посылок к заключениям. Если мир объектов знания мыслился ими как существующий вне времени, вне изменения, то лишь рассуждения, обладающие этим свойством, позволяли оставаться в сфере знания. В этом и заключалось особое ценностное отношение к понятию истины. Если бы вдруг в ходе рассуждения мы от истины пришли ко лжи, это бы означало, что случилось пренеприятное событие, мы вышли из сферы знания в сферу мнений, которые одни лишь и могут быть ложными.

Сразу становится понятным смысл уже привычных для нас теорем о непротиворечивости и полноте логических исчислений. Если знание возможно лишь о том, что вечно и неизменно, то принимаемые нами способы рассуждений должны гарантировать его сохранение – это теорема о непротиворечивости. В свою очередь теорема о полноте гарантирует, что принимаемые нами способы рассуждений позволяют нам извлечь потенциально все возможные следствия из постигнутой вечной и вневременной истины. Именно этими свойствами должна обладать, по мнению А.Тарского, идеальная дедуктивная теория.

«*Всякая дисциплина, даже если она построена совершенно правильно во всех методологических отношениях, теряет в наших глазах свою ценность, если у нас есть основания подозревать, что не все утверждения этой дисциплины истинны. С другой стороны, ценность дисциплины будет тем выше, чем больше будет количество истинных высказываний, доказуемых в этой системе. С этой точки зрения, идеальной дисциплиной может считаться такая, которая среди установленных ею положений содержит все истинные высказывания, относящиеся к этой теории, и не содержит ни одного ложного. ... дедуктивная теория, конечно, не достигает нашего идеала, если она не сочетает в себе непротиворечивости и полноты*» [34, с. 185–186].

Достойно удивления то, что такая точка зрения сохранилась до наших дней. Мы понимаем, что живем в мире, пронизанном временем и наполненном изменяющимися явлениями, но почему-то пользуемся логикой, которая ценностно ориентирована на рассуждения о неизменном, вневременном. Могут возразить, что классическая логика применяется и для построения рассуждений об изменчивом мире, и привести ряд убедительных примеров. Никто с этим не спорит. Речь идет о другом – об адекватности используемого логического аппарата.

Классическая логика в том виде, какой мы ее сейчас знаем, является необходимым условием принятия платоновско-аристотелевского взгляда на цели познания. Отсюда вовсе не следует, что она будет столь же идеальным инструментом в случае принятия какой-либо другой точки зрения на эти цели.

Обратимся к эволюции, которую претерпели за прошедшие века взгляды на природу математического знания. Адекватно ли им прежнее понимание истины?

На смену миру вечных платоновских идей, чтобы примирить их с христианством, пришел столь же вечный математический план, по которому бог создал вселенную. Математика понималась как наука, изучающая особые математические принципы устройства мира. «*По мнению Декарта, одной лишь математики было бы вполне достаточно для изучения физического мира*» [21, с. 55]. Всякий новый принцип, открытый математиками, должен был быть сразу занесен в копилку знаний. Роль же логики понималась как роль хранительницы этих однажды добытых и навеки застывших знаний. В то же время в естественных науках никакого постоянства не наблюдалось с самого начала. В физике, в химии, в других науках, изучающих изменчивый мир, одна теория сменяла другую. При этом логика, как ни странно, оставалась прежней. Имела место своеобразная эклектика методов, покоящихся на разных философских основаниях, которая сохранилась и до настоящего времени. Нельзя быть одновременно платоником и эмпириком.

Промышленная революция в Европе остро поставила вопрос об отказе от созерцательного отношения к миру. Аристотелевские взгляды на науку – «*так же как свободным называем человека, который живет ради самого себя, а не для другого, точно так же и эта наука единственно свободная, ибо она одна существует ради самой себя*» [Метафизика, I, 2, 982b 25] – уже не отвечали социальным запросам. С серьезной критикой логики и форм современной ему науки выступил Фрэнсис Бэкон.

«Как науки, которые теперь имеются, бесполезны для новых открытий, так и логика, которая теперь имеется, бесполезна для открытия знаний.

Логика, которой теперь пользуются, скорее, служит укреплению и сохранению заблуждений, имеющих свое основание в общепринятых понятиях, чем отысканию истины. Поэтому она более вредна, чем полезна.

Силлогизм не приложим к принципам знаний, он бесплодно прилагаем к средним аксиомам, так как далеко не соответствует тонкости природы. Поэтому он подчиняет себе мнения, а не предметы» [8, с. 13].

Особый вред видел Ф.Бэкон в догматическом отношении к философскому наследию Аристотеля.

«Люди полагают, что философия Аристотеля, во всяком случае, принесла большее единогласие, ибо, после того как она появилась, более древние философии прекратили свой рост и были преданы забвению, а в те времена, которые за нею последовали, не было открыто ничего лучшего; так что эта философия столь хорошо построена и обоснована, что покорила себе и прошедшее и будущее время. Но, во-первых, ложно то, что люди думают о прекращении древних философий после выхода трудов Аристотеля. Еще долго после того, до са-

мых времен Цицерона и до последовавших за ними веков, существовали труды древних философов. Но позднее, когда по причине нашествия варваров на Римскую империю человеческая наука потерпела как бы кораблекрушение, тогда-то философии Аристотеля и Платона были сохранены потоком времени, как доски из более легкого и менее твердого материала. Обманулись люди и относительно единогласия, если рассмотреть дело внимательнее. Ибо истинное единогласие состоит в совпадении свободных суждений после того, как вопрос исследован. Но величайшее большинство тех, кто пришел к согласию с философией Аристотеля, подчинилось ей по причине составленного заранее решения и авторитета других. Это, скорее, послушание и подчинение, чем согласие. Но если бы даже это было истинное и широкое согласие, то согласие не только не должно считаться надежным авторитетом, а, наоборот, служит сильным доводом в пользу противного мнения. Общее согласие – самое дурное предзнаменование в делах разума, исключая дела божественные и политические, где есть право подачи голоса. Ибо большинству нравится только то, что поражает воображение и охватывает ум сплетением обычных понятий, как сказано выше» [8, с. 40].

Один из действительно сильных ударов по математическим идеалам знания Платона и Аристотеля был нанесен появлением неевклидовых геометрий. Оказалось, что математические истины, служившие образцом для Платона и Аристотеля, а также математический план, по которому бог создал мир, вовсе не являются незыблемыми. Драматизм ситуации заключался в том, что если ранее ученые были уверены, что наука твердо стоит на прочном фундаменте математики, теории которой – это вечные принципы устройства реального мира, то вдруг оказалось, что даже геометрия, самая земная из математических дисциплин, вовсе не является богом данной. Для нас события XIX в. уже стали историей, мы к ним привыкли, мы знаем все, что произошло после них, и потому, наверное, острота произошедшей мировоззренческой революции впечатляет нас не столь уж и сильно. Чего нельзя сказать о современниках тех событий.

«... математики с досадой и огорчением обнаружили, что несколько различных геометрий одинаково хорошо согласуются с наблюдательными данными о структуре пространства. Но эти геометрии противоречили одна другой – следовательно, все они не могли быть одновременно истинными. Отсюда напрашивался вывод, что природа построена не на чисто математической основе, а если такая первооснова и существует, то созданная человеком математика не обязательно соответствует ей. Ключ к реальности был утерян. Осознание этой потери было первым из бедствий, обрушившихся на математику» [21, с. 13–14].

Следующим потрясением явилось событие, когда в основаниях математики вдруг обнаружили противоречия. Формы рассуждений, которыми всегда пользовались математики, вдруг оказались ненадежными. Ни одно из предложенных решений не было признано удовлетворительным. Окончательный крест на *вечных истинах* был поставлен теоремами Геделя и Тарского, из которых следует, что даже если бы мир идей, мир вечных форм существовал, то мы принципиально не могли бы его постичь. Идея познания как постижения истины оказалась непродуктивной.

«Теорема Геделя вызвала смятение в рядах математиков. Последующее развитие событий привело к новым осложнениям. Оказалось, например, что даже аксиоматически-дедуктивный метод, столь высоко ценимый в прошлом как надежный путь к точному знанию, небезупречен» [21, с. 15].

Существует порог сложности, переступив который, мы уже никогда не можем быть уверены в том, что наше знание непротиворечиво, а потому и стремление к идеалу, в конце концов, упирается в принципиально непробиваемую стену. Поскольку данный порог сложности давно остался позади, наука вот уже более ста лет развивается лишь в надежде на собственную непротиворечивость и обречена оставаться в таком состоянии, если не произойдет никакого кардинального пересмотра ее оснований.

Теоремы Геделя и Тарского принадлежат к числу немногих *абсолютных* результатов в истории науки и потому имеют большое мировоззренческое значение. Тем не менее, относиться к ним можно по-разному. Одни считают, что ничего страшного не произошло, что теорема Геделя о неполноте говорит об аппроксимативном характере человеческого познания, что теорема Тарского о неопределимости предиката «быть истинным» свидетельствует о богатом содержании понятия истины, и т.д. Мы придерживаемся иной точки зрения: эти теоремы ставят крест на концептуальных оснований того идеала научного знания, к которому мы до сих пор стремились. Заслуга классической (в широком смысле этого слова) логики в том, что она собственными средствами позволила точным образом определить границы своей компетенции.

«Нынешнее состояние математики – не более чем жалкая пародия на математику прошлого с ее глубоко укоренившейся и широко известной репутацией безупречного идеала истинности и логического совершенства» [21, с. 15].

Несмотря на все это, огромные усилия математиков и логиков были направлены на поддержание пошатнувшейся доктрины. Их труды не пропали даром.

«С проклятием "Чума на оба ваших дома!" они обратились к тем областям математики, где методы доказательства казались им надежными. Они нашли также, что проблемы, придуманные человеком, более привлекательны и легче поддаются решению, чем проблемы, поставленные природой. [21, с. 16].

Была развита теория множеств – аналог той самой первой истины, к которой можно свести все остальное. Правда, оказалось, что одной единственной теории множеств не существует, а имеется целый ряд альтернатив, и определить, какая из них *истиннее*, невозможно. К тому же нет никакой уверенности, что сами эти теории непротиворечивы. Одновременно с этим оказалось, что многие вроде бы хорошо известные теории имеют нестандартные модели. Поэтому не совсем понятно, теориями чего они на самом деле являются?

«Теория множеств принесла в математику целую шкалу частных случаев актуальной бесконечности. Однако большинство из них нельзя разумно интерпретировать в реальном мире. Их существование есть просто следствие основной концепции актуальной бесконечности в канторовской теории множеств.

Теория множеств открыла путь к изучению необъятного количества различных структур и к беспрецедентному росту знаний относительно них. Это привело к распылению математики. Кроме того, большинство результатов такого рода приобретает смысл только за счет существования соответствующей структуры в канторовской теории множеств. Математика, основанная на канторовской теории множеств, превратилась в математику канторовской теории множеств.

Канторовская теория множеств ответственна за это ущербное развитие математики; с другой стороны, она накладывает на математику ограничения, которые не так легко преодолеть. Все структуры, изучаемые в математике, априорно жестко заданы, и роль математики есть просто роль наблюдателя, их описывающего. Именно поэтому математики столь беспомощны в постижении таких неточных по самой своей сути понятий, как реализуемость, взаимоотношение непрерывного и дискретного и т.д.

Современная математика изучает, таким образом, конструкцию, отношение которой к реальному миру по меньшей мере проблематично. Более того, эта конструкция не единственно возможная, да и на самом деле не самая подходящая с точки зрения самой математики. Это ставит под вопрос роль математики как научного и полезного метода. Математика может быть низведена к простой игре, происходящей в некотором специфическом искусственном мире. Это не опасность для математики в будущем, а непосредственный кризис современной математики. Он проявляется и в том, что часто глубокие и остроумные математические результаты не вызывают никакого ин-

тереса не только у людей, которые не являются математиками-профессионалами, но даже у математиков, в настоящее время работающих над проблемами с другим расположением фигур на шахматной доске» [10, с. 13–14].

Одним из условий существования науки является преемственность. Чем больше накоплено научных результатов, тем труднее от них отказаться. Но чем дальше, тем больше странных результатов и понятий появляется в самой логике. Когда пишут, например, о континууме суперинтуиционистских логик, понимаешь, что произошла подмена понятия логики и его выхолащивание. Речь должна идти не о логике, а о чем-то другом, о каких-то математических структурах, которые в большом количестве существует в рамках одной из теорий множеств, и только. К самой логике они имеют весьма и весьма отдаленное отношение.

«Математики поклонялись золотому тельцу – строгому, одинаково приемлемому для всех доказательству, истинному во всех возможных мирах, искренне веря, что это и есть бог. Теперь наступило прозрение: математики поняли, что их бог ложный. Но истинный бог так и не открылся, и теперь им не оставалось ничего другого, как гадать, существует ли он вообще» [21, с. 365].

Современная математика не может служить тем идеалом научного знания, который две с половиной тысячи лет назад предстал перед мысленными взорами Платона и Аристотеля и так поразил их. Созерцательное отношение к внешнему миру давно перестало удовлетворять запросам развития науки. Реальный мир оказался гораздо сложнее мира застывших платоновских идей. Вряд ли стоит и далее пытаться реанимировать конструкцию, продемонстрировавшую собственную несостоятельность.

Возникшие проблемы касаются не одной только математики, но и философии в целом. Очевидно, что философия с тех давних пор ушла в своем развитии очень далеко. В то же время господство на протяжении веков аристотелевской логики, с характерными для нее способами образования понятий и критериями правильности рассуждений, не могло не проявиться в возникновении различных псевдопроблем, которые проистекают не из природы исследуемых объектов, а из способов их представления в языке и мышлении. До сих пор идут дискуссии по вопросам дискретности и непрерывности, конечности и бесконечности, покоя и движения, истинности и ложности и пр. Не будет преувеличением сказать, что ни один из великих философов прошлого и настоящего не преминул обратить на них своего внимания. Застарелость этих проблем и отсутствие сколько-нибудь внятного удовлетворительного решения вынуждают предположить, что причина кроется в неадекватности понятийного аппарата, которым мы пользуемся. Вина за это не в последнюю очередь ложится на логику, которая продолжает оставаться логикой статичного универсума.

В качестве примера обратимся к диалектике, имея в виду не искусство ведения дискуссии с целью отыскания истины, а особую систему философских взглядов на природу и ее познание. Вряд ли кого из студентов, изучавших историю философии, могли оставить равнодушными слова Гераклита о том, что «... *космос, один и тот же для всех, не создал никто из богов, никто из людей, но он всегда был, есть и будет вечно живой огонь, мер-*

но возгорающийся, мерно угасающий» [36, с. 217]. Именно Гераклита считают родоначальником диалектики. Трудно найти возражения против той точки зрения, что мы живем в изменчивом мире, в котором нет ничего постоянного, но все закономерно перетекает из одних форм в другие. Высокую оценку идеям Гераклита дал и такой противник современной диалектики как К.Р.Поппер.

«Кто, если не Гераклит, был тем великим мыслителем, который первым осознал, что люди суть языки пламени, а вещи представляют собой процессы»?"» [29, с. 253].

«Сверхъестественная интуиция подсказала Гераклиту, что вещи являются процессами, что наши тела суть языки пламени, что "скала или бронзовый котел... постоянно подвергаются невидимым изменениям"» [29, с. 252].

Самой настоящей трагедией человеческой мысли можно назвать то, что гениальный посыл философии Гераклита так и не был реализован. Называя Гераклита величайшим мыслителем, К.Р.Поппер одновременно с этим резко отрицательно относится к диалектике, считая, что она *«сослужила дурную службу ... философии»*[29, с. 551]. Он справедливо упрекает ее в умозрительности и антинаучности, убедительно доказывает, что претензии на существование особой диалектической логики несостоятельны, что гегелевская «Логика» – это *«... типичный образец донаучного и даже дологического мышления»* [29, с. 552]. Все эти упреки верны, но насколько они справедливы? Зададимся вопросом, что явилось бы необходимым условием реализации идей

Гераклита? Очевидно, что для этого должна была бы существовать система понятий, которая позволяла бы говорить об особенностях постоянно изменяющегося мира. Должны были быть сформулированы и закреплены способы рассуждений о таком мире. Но что мы наблюдаем в действительности? Победила точка зрения Платона и Аристотеля, что в мире существуют лишь вещи, наделенные свойствами, а не процессы, что знание возможно лишь о том, что вечно и неизменно, что последовательно рассуждать об изменчивом мире просто невозможно. Наследники Гераклита были лишены языка, адекватного для выражения своих идей. Они были вынуждены прибегнуть к словесной эквилибристике в терминах противоречий, чтобы хоть как-то выразить идею изменения. Их справедливо критиковали за неправильное использование языка, но они были загнаны в угол, и попали туда не по своей вине.

Через две с половиной тысячи лет после Гераклита «*такой тонкий аналитик, как Б.Рассел, фактически прямо признал то, что Зенон отрицал в качестве парадокса: "... мы живем в неизменном мире и ... стрела в каждый момент своего полета фактически покоится", однако, согласно Расселу, данное обстоятельство не мешает признавать наличие движений и изменений в том смысле, что в разные моменты времени мир находится в разных состояниях*» [2, с. 39]. Вряд ли кто из студентов, изучающих историю философии, согласится с тем, что кинематографический взгляд на природу движения является большим шагом вперед в нашем познании окружающего мира.

Мы полностью согласны с тем, что «*Современная наука, особенно математика и физика, блестяще подтвердила философию элеатов, приняв статические* *представления о движении. Та картина движения, которую она дает, надо полагать, вполне бы удовлетворила как Парменида, так и Зенона с точки зрения отсутствия в ней процесса движения. Обгоняя черепаху, Ахилл не движется в том смысле, что не переходит из одного места в другое. Просто в один момент времени он находится в одном месте, в другой – в другом, подобно тому, как мчащийся по шоссе автомобиль на киноленте просто размещается в разных кадрах этой ленты. Произошла лишь смена терминологии при неизменном подходе, выдвинутом еще элеатами»* [2, с. 41].

Но и упреки в адрес ученых должны быть справедливыми. Они тоже являются заложниками тех форм рассуждений, которые изначально базируются на свойствах статичного универсума.

IV. АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛЕДОВАНИЯ

Не отказываясь до поры до времени от понятия истинностного значения, попробуем ответить на вопрос, каким минимальным набором свойств должно обладать отношение логического следования между предложениями языка? При этом необходимым условием будет понимание логики как науки о *хороших способах рассуждений*.

Прежде всего, *правила построения логически корректных рассуждений не должны привносить в эти рассуждения ничего постороннего, что не содержалось бы в исходных посылках*. Правила логического вывода – это одежды, в которые мы одеваем свои мысли. Эти одежды не должны нас стеснять. Если мы хотим строить умозаключения на основе понятия истинностных оценок, то мы не должны отдавать предпочтения одним оценкам в ущерб другим, так как всегда может быть задан вопрос о причинах такого предпочтения. Ответ на него с необходимостью будет указывать на привносимые извне предпосылки. Логика может иметь онтологические предпосылки, определяющие область ее применимости, но должна избегать принятия гносеологических предпосылок, являющихся по своей сути искажениями, которые мы изначально вносим в нашу систему знания об окружающем мире.

Вторым важным свойством является то, что *хорошие рассуждения должны удерживать нас от заблуждений*. При классическом понимании следования данное свойство выражается в том, что истинность посылок является достаточным условием истинности заключения. Это означает, что классическая логика предохраняет нас от заблуждений лишь в том случае, если все исходные посылки истинны. Но что случится, если хотя бы одна из посылок окажется ложной? Тогда классическая логика снимает с себя всякую ответственность, и заключение может быть как истинным, так и ложным.

Классическая логика, базирующаяся на определении следования по Тарскому, не обладает ни одним из этих двух свойств.

Возможно ли дать естественное определение логического следования, которое удовлетворяло бы перечисленным выше условиям? Как строить выводы из истинных и из ложных посылок, но в то же время не впадать в заблуждения? Перефразируя Аристотеля, можно сказать, что заблуждение – это *«... говорить о сущем, что его нет, или о не-сущем, что оно есть»*. Чтобы не впасть в заблуждение, мы должны быть способны, придя к некоторому заключению, определить его истинностное значение. Т.е. *форма умозаключения может считаться правильной, если знание истинностных значений посылок является достаточным условием знания истинностного значения заключения*. Отличие от классического понимания минимально – слово *истинность* мы заменяем на *истинностное значение*. Говоря об истинностных значениях посылок, мы не требуем, чтобы они были одновременно истинны, а допускаем любое распределение истинностных значений, и тем самым удовлетворяем первому условию. Для нас совершенно не важно, будет ли результирующее истинностное значение заключения *истиной* или *ложью*. Главным является то, что если это значение – *истина*, то мы должны быть в состоянии определить, что оно – *истина*, а если – *ложь*, то мы должны быть в состоянии определить, что оно – *ложь*. В отношении заключения мы не лишаем себя возможности *«говорить о том, что сущее есть и не-сущее не есть»*, а принимаем это в качестве необходимого условия правильности умозаключения. Таким образом, второе условие также удовлетворено.

Это приводит нас к следующему строгому **альтернативному определению логического следования**: *«Из множества формул $\Sigma=\{B_1,..,B_k\}$ следует формула А, если и только если существует функция f, которая позволяет по истинностным значениям формул множества Σ, вычислить истинностное значение формулы А»*.

$$\{B_1,..,B_k\}\|\!\!=A \Leftrightarrow \exists f\forall v(v(A)=f(v(B_1),..,v(B_k))$$

где v – это обычное булево приписывание истинностных значений формулам языка.

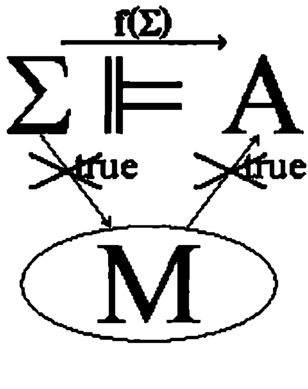

Рис. 2

Обращает на себя внимание естественность этого определения. К нему в гораздо большей степени подходит термин *следование*, чем к определению, данному Тарским. В нем действительно идет речь о связи между формулами, и посредничество модели оказывается излишним. Могут возразить, что коль скоро в определении следования мы используем истинностные оценки формул, то мы вовсе не отказываемся от понятия модели. Данное возражение основано на недоразумении. Речь предметна. Чтобы дать семантическое определение следования, а не синтаксическое определение выводимости, мы просто обязаны сопоставить выражениям языка некоторые внеязыковые объекты. Поэтому мы действительно используем понятие модели, но оно в данном нами определении следования не играет той решающей роли, которую играет в классическом определении Тарского. Чтобы теория, построенная на основе понятия логического следования по Тарскому, имела смысл, т.е. обладала минимальным набором полезных свойств, требуется существование хотя бы одной модели, в которой одновременно истинны все ее аксиомы. При альтернативном определении следования модель нужна лишь для того, чтобы сопоставить предложениям языка внеязыковые объекты, и только. Одновременная истинность всех предложений множества Σ при альтернативном определении не является необходимым условием. Необходимым условием является просто приписывание любой истинностной оценки. Т.е. понятие модели в классическом и альтернативном определении следования играет совершенно разные роли.

Еще одной важной чертой данного определения является то, что в метаязыке мы используем не логические понятия, а понятие вычислимости как более основополагающее. Т.е. *порочный круг* первоначального классического определения разорван.

Если попытаться провести аналогию с воззрениями Платона и Аристотеля на природу знания, то мы определили следование для *изменяющегося мира явлений*, а не для вечных существующих вне времени истин. Это может показаться пустой декларацией, если не обратить внимание на следующую очень интересную особенность нашего определения.

Для простоты изложения рассмотрим случай, когда множество посылок состоит всего лишь из одной формулы B. Тогда определение будет иметь вид:

$$B||=A \Leftrightarrow \exists \mathbf{f} \forall v(v(A)=\mathbf{f}(v(B))$$

В нем выражение v(A) обозначает истинностное значение формулы A при приписывании значений ее атомарным подформулам, осуществляемым посредством функции v. Известно, что всякая булева формула A однозначным образом определяет соответствующую ей булеву функцию, которую мы обозначим посредством **A**. Вместо v(A) и v(B) в нашем определении мы могли бы написать **A**(v) и **B**(v), понимая под этим значения функций **A** и **B** для значений аргументов, определяемых посредством приписывания v. Это позволяет переписать определение следующим образом:

$$B||=A \Leftrightarrow \exists \mathbf{f} \forall v(\mathbf{A}(v)=\mathbf{f}(\mathbf{B}(v)))$$

Но что такое $\forall v(\mathbf{A}(v)=\mathbf{f}(\mathbf{B}(v)))$? Это стандартное утверждение о равенстве функции **A** композиции двух функций **B** и **f**. Поэтому мы можем представить наше определение альтернативного следования в следующей чисто функциональной форме:

$$B \| = A \Leftrightarrow \exists f(A = f \circ B)$$

*Из формулы В следует формула А, если и только если существует такая функция f, которая позволяет преобразовать функцию **В** в функцию А.*

То же самое можно выразить на языке диаграмм.

Из формулы В следует формула А, если и только если существует такая функция f, что следующая диаграмма коммутативна:

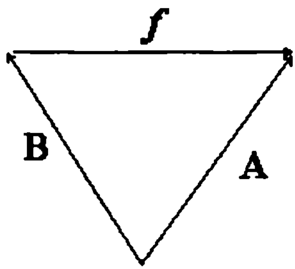

Рис. 3

Таким образом, мы получили, что альтернативное следование определяет логику, в которой значениями булевых формул являются не значения функций (истина или ложь), а сами булевы функции. Стоило только нам отказаться от статичного мира вечных истин, и мы тут же пришли к функциям, которые по самой своей природе гораздо лучше приспособлены для описания динамически изменяющихся сред.

Следует обратить внимание на то, что в последней формулировке альтернативного следования конкретный способ представления функций и принимаемые ими значения никак не специфицированы. Поэтому возможны различные уточнения того, что мы будем под ними понимать. В самом простом случае это может быть теоретико-множественное представление функции как множества пар, удовлетворяющего известным ограничениям. На более абстрактном уровне это могут быть стрелки теории категорий. Мы можем ограничиться вычислимыми функциями, или самими алгоритмами вычисления, что не является одним и тем же. Ничто не мешает проинтерпретировать функции реальными физическими процессами, имеющими дискретную или непрерывную природу. Для каждой из таких интерпретаций должно быть дано уточнение отношения равенства между функциями. Если в теоретико-множественном случае проблем не возникает, то, например, в случае вычислительной интерпретации отношение равенства неразрешимо. Все это приводит к различным логикам. Индивиды универсума также могут быть проинтерпретированы процессами. В этом случае привычные нам статичные индивиды классической логики могут быть определены всего лишь как различные состояния выполнения процессов.

В динамическом универсуме естественным образом реализуется динамическая концепция времени, производного от понятия процесса. В ее рамках могут быть поставлены вопросы о направлении времени, о синхронизации процессов, одновременности событий и пр.

Логические системы, построенные на основе альтернативного подхода, принципиально непротиворечивы. Это является следствием того, что противоречивыми могут быть истинностнозначные высказывания, но не выполняемые действия, результат которых всегда определен однозначно.

Знание в альтернативной логике можно определить посредством множества функций f, доступных субъекту рассуждения. Например, если субъект является геометром, он может быть способным производить элементарные действия: поставить точку на листе бумаги, соединить две точки отрезком прямой, начертить с помощью циркуля дугу или окружность произвольного радиуса. Различные последовательности этих элементарных действий определяют все возможные функции f, все возможные построения, которые он может осуществить. В этом смысле сама теория геометрии определяется множеством таких функций. Другие научные теории также имеют аналогичное представление. При таком понимании знания и принятии вычислительной интерпретации функций интересную роль начинает играть понятие универсальной машины Тьюринга – аналога всезнающего субъекта.

Мы не станем дальше развивать тему возможных конкретных интерпретаций отношения альтернативного следования, так как для этого пришлось бы затронуть практически все направления исследований философской логики, и все равно многое осталось бы недосказанным.

V. ЛОГИКА ACL

В данном параграфе мы построим аксиоматизацию отношения альтернативного логического следования для пропозициональной булевой логики. По своей сути это будет логика булевых функций, а не логика булевых значений. Цель проста – посмотреть, в чем разница между ней и классической логикой высказываний?

Прежде всего, фиксируем язык:

1. Var – множество пропозициональных переменных;
2. &, ∨, ¬ – логические связки.

Определение формулы – обычное.

Пусть $Val = \{0,1\}^{Var}$ – множество приписываний истинностных значений пропозициональным переменным нашего языка. Обычным образом мы распространяем функции приписывания истинностных значений на все формулы языка:

1. $v(\neg A) = 1\text{-}v(A)$;
2. $v(A\&B) = \min(v(A), v(B))$;
3. $v(A\vee B) = \max(v(A), v(B))$.

По определению вводим связки:

Def.1 $A\supset B =_{def} \neg A\vee B$
Def.2 $A\equiv B =_{def} (A\supset B)\&(B\supset A)$
Def.3 $A\oplus B =_{def} (A\&\neg B)\vee(\neg A\&B)$

Теперь определим на семантическом уровне отношение *следования* $\Gamma||=A$.

Def.4 Из множества формул $\Gamma=\{B_1,\ldots,B_k\}$ *следует* формула A ($\Gamma||=A$), если и только если существует булева функция $f:\{0,1\}^k\rightarrow\{0,1\}$, которая позволяет для произвольного приписывания $v\in Val$ на основании оценок $v(B_1),\ldots,v(B_k)$ вычислить оценку $v(A)$, т.е. $v(A)=f(v(B_1),\ldots,v(B_k))$.

$$\{B_1,..,B_k\}||=A \Leftrightarrow \exists f\forall v(v(A)=f(v(B_1),..,v(B_k))$$

Def.5 *Выводимостью* будем называть выражение вида $\Gamma||\text{-}A$, где A – формула, а $\Gamma=\{B_1,\ldots,B_k\}$ – конечное множество формул логики высказываний. Будем называть множество формул Γ посылками выводимости, а формулу A – ее заключением.

Аксиоматизацию отношения следования представим в виде набора выводимостей и правил перехода от одних выводимостей к другим. Формулы, доказуемые в классической логике высказываний, будем обозначать посредством $|\text{-}A$.

A.1 $||\text{-}A\vee\neg A$
A.2 $\{A, B\}||\text{-}A\&B$
A.3 $\{A\}||\text{-}\neg\neg A$

R.1 $|\text{-}A\equiv B \Rightarrow \{A\}||\text{-}B$
R.2 $\Gamma||\text{-}A$ и $\{A\}\cup\Delta||\text{-}B \Rightarrow \Gamma\cup\Delta||\text{-}B$

Заметим, что в правиле R.1 мы используем ссылку на доказуемую в классической логике эквивалентность.

Эта ссылка позволила нам дать компактную аксиоматизацию, но не является обязательной. С равным успехом мы могли бы оставить одно лишь правило R.2, а R.1 заменить на несколько аксиом, соответствующих аксиомам булевой алгебры, по правилу: если A = B – аксиома булевой алгебры, то к набору наших аксиом-выводимостей мы добавляем две новые – $\{A\}||\text{-}B$ и $\{B\}||\text{-}A$.

Так как по нашему определению выводимости слева от знака ||- всегда стоит множество, мы будем опускать фигурные скобки и символ операции объединения множеств формул. Запись двух множеств формул через запятую Γ, Δ служит сокращением для $\Gamma\cup\Delta$, запись двух формул A, B – сокращением для $\{A, B\}$ и т.д.

Дадим определение доказательства в нашем исчислении.

Def.6 *Доказательством* называется непустая конечная последовательность, каждый из элементов которой является либо доказуемой формулой классического исчисления высказываний вида $A\equiv B$, либо аксиомой-выводимостью A.1-A.3, либо выводимостью, полученной из предыдущих элементов последовательности по правилам R.1-R.2. Доказанной считается выводимость, являющаяся конечным элементом последовательности.

Покажем непротиворечивость построенного исчисления. Для этого нам надо показать, что всякая доказуемая выводимость обладает свойством следования.

Теорема о непротиворечивости ACL. Если Γ||-A, то Γ||=A.

Для начала проверим аксиомы A.1–A.3.

A.1 $v(A \vee \neg A) = \max(v(A), v(\neg A)) = \max(v(A), 1-v(A))=1$.

A.2 $v(A\&B) = \min(v(A), v(B))$.

A.3 $v(\neg A) = 1-v(A)$.

Теперь проверим, что правила R.1-R.2 сохраняют свойство следования.

Если $\Gamma=\{B_1,\ldots,B_k\}$, то $v(\Gamma)$ будет использовать в качестве сокращения для $\langle v(B_1),\ldots,v(B_k)\rangle$

R.1
+1. $\vdash A \equiv B$
2. $v(B)=v(A)$ – из 1 по определению v

R.2
+1. $v(A) = f(v(\Gamma))$
+2. $v(B) = g(v(A),v(\Delta))$
3. $v(B) = g(f(v(\Gamma)),v(\Delta))$ – из 1, 2 подстановкой

Покажем, что построенное исчисление нетривиально, т.е. существуют недоказуемые выводимости. Для этого достаточно привести пример выводимости, не обладающей свойством следования. Самый простой пример – это $\varnothing \Vdash p$. Так как множество Г пусто, то значение $v(p)$ должно быть константным при всех приписываниях $v \in Val$, что очевидным образом не имеет места.

Теорема доказана.

Доказанная выше теорема хоть и названа нами теоремой о непротиворечивости, но это скорее дань традиции, так как ни о какой непротиворечивости в объектном языке речь не идет. Мы всего лишь показали, что аксиомы обладают свойством вычислимости истинностного значения заключения на основании истинностных значений посылок, и правила вывода сохраняют это свойство.

Доказательство теоремы о непротиворечивости интересно тем, что оно более глубоко раскрывает суть предложенной семантики. Каждой из аксиом А.1-А.3 мы сопоставили свою функцию (свой алгоритм) вычисления истинностного значения заключения на основании истинностных значений посылок. Аксиоме А.1 мы сопоставили константную функцию, которая может принимать лишь значение 1. Аксиоме А.2 мы сопоставили стандартную функцию, которая вычисляет истинностное значение формулы конъюнктивного вида на основании истинностных значений конъюнктов – min(x,y). Аксиоме А.3 мы сопоставили функцию, вычисляющую значение формулы, главный знак которой отрицание – 1-х. Правилу R.1 мы сопоставили тождественную функцию id(x)=x, а правило R.2 – это правило суперпозиции функций, позволяющее строить из простых функций более сложные, или, если говорить об алгоритмах, это правило их сочленения. Семантическим коррелятом любой доказуемой выводимости всегда будет некоторая суперпозиция исходных функций. Ни о какой истинности аксиом речь не идет и вообще идти не может. Функции и алгоритму нельзя сопоставить никакого истинностного значения. Каждый алгоритм правилен по определению, так как он позволяет вычислять именно то, что он вычисляет. Истинными или ложными могут быть лишь утверждения о свойствах алгоритмов. Например, действительно ли они позволяют вычислять то, к чему их хотят применить, но это уже совершенно другой вопрос.

Теорема о непротиворечивости имеет очевидное, но очень важное следствие.

Следствие теоремы о непротиворечивости.

По всякому доказательству Г||-A в логике **ACL** мы можем синтезировать функцию, которая вычисляет истинностную оценку формулы A на основании истинностных оценок формул, входящих в Г.

Смысл этого следствия в том, что каким бы сложным ни было рассуждение, построенное в рамках этой логики, *знание истинностных значений посылок является достаточным условием знания истинностного значения заключения*, к которому это рассуждение привело. Именно эта идея и была положена в основание альтернативного определения логического следования, и именно благодаря ей мы гарантированы от того, чтобы в ходе рассуждений впасть в заблуждение.

Лемма 1. Следующие выводимости и правила перехода от одних выводимостей к другим доказуемы в логике **ACL**.

T.1 A||-A
T.2 |-A ⇒ ||-A
T.3 |-A ⇒ (Г, A||-B ⇒ Г||-B)
T.4 |-¬A ⇒ (Г, A||-B ⇒ Г||-B)
T.5 |-A≡B ⇒ (Г||-A ⇒ Г||-B)

T.6 $\vdash A \equiv B \Rightarrow (\Gamma, B \Vdash C \Rightarrow \Gamma, A \Vdash C)$
T.7 $\Gamma, A \Vdash B \Leftrightarrow \Gamma, \neg A \Vdash B$
T.8 $\Gamma \Vdash A \Leftrightarrow \Gamma \Vdash \neg A$
T.9 $A, B \Vdash A \vee B$
T.10 $\Gamma \Vdash A \Rightarrow \Gamma, B \Vdash A$
T.11 $A\&B, \neg A\&B \Vdash B$
T.12 $B, \neg A\&B \Vdash A\&B$
T.13 $B, A\&B \Vdash \neg A\&B$
T.14 $\Gamma \Vdash A; \Sigma \Vdash B \Rightarrow \Gamma, \Sigma \Vdash A\&B$
T.15 $\Gamma \Vdash A; \Sigma \Vdash B \Rightarrow \Gamma, \Sigma \Vdash A \vee B$
T.16 $\Gamma, A\&B \Vdash C \Rightarrow \Gamma, A, B \Vdash C$
T.17 $\Gamma, A \vee B \Vdash C \Rightarrow \Gamma, A, B \Vdash C$
T.18 $A, B \Vdash A \oplus B$
T.19 $A, A \oplus B \Vdash B$
T.20 $\{A_1, \dots, A_i, \dots, A_k\} \Vdash A_i$

T.1 $A \Vdash A$

1. $\vdash A \equiv A$	– КИВ
2. $A \Vdash A$	– из 1 по R.1

T.2 $\vdash A \Rightarrow \Vdash A$

+1. $\vdash A$	
2. $\vdash (A \vee \neg A) \equiv A$	– из 1 по КИВ
3. $A \vee \neg A \Vdash A$	– из 2 по R.1
4. $\Vdash A$	– из 3, A.1 по R.2

T.3 $\vdash A \Rightarrow (\Gamma, A \Vdash B \Rightarrow \Gamma \Vdash B)$

+1. $\vdash A$	
+2. $\Gamma, A \Vdash B$	
3. $\Vdash A$	– из 1 по T.2
4. $\Gamma \Vdash B$	– из 2, 3 по R.2

T.4 $\vdash \neg A \Rightarrow (\Gamma, A \Vdash B \Rightarrow \Gamma \Vdash B)$

+1. $\vdash \neg A$

+2. $\Gamma, A \Vdash B$

3. $\Vdash \neg A$ – из 1 по T.2

4. $\Vdash \neg\neg A$ – из 3, A.3 по R.2

5. $\vdash \neg\neg A \equiv A$ – КИВ

6. $\neg\neg A \Vdash A$ – из 5 по R.1

7. $\Vdash A$ – из 4, 6 по R.2

8. $\Gamma \Vdash B$ – из 2, 7 по R.2

T.5 $\vdash A \equiv B \Rightarrow (\Gamma \Vdash A \Rightarrow \Gamma \Vdash B)$

+1. $\vdash A \equiv B$

+2. $\Gamma \Vdash A$

3. $A \Vdash B$ – из 1 по R.1

4. $\Gamma \Vdash B$ – из 2, 3 по R.2

T.6 $\vdash A \equiv B \Rightarrow (\Gamma, B \Vdash C \Rightarrow \Gamma, A \Vdash C)$

+1. $\vdash A \equiv B$

+2. $\Gamma, B \Vdash C$

3. $A \Vdash B$ – из 1 по R.1

4. $\Gamma, A \Vdash C$ – из 3, 2 по R.2

T.7 $\Gamma, A \Vdash B \Leftrightarrow \Gamma, \neg A \Vdash B$

+1. $\Gamma, A \Vdash B$

2. $\neg A \Vdash \neg\neg A$ – A.3

3. $\vdash A \equiv \neg\neg A$ – КИВ

4. $\neg A \Vdash A$ – из 2, 3 по T.5

5. $\Gamma, \neg A \Vdash B$ – из 4, 1 по R.2

+1. $\Gamma, \neg A \Vdash B$

2. $A \Vdash \neg A$ – A.3

3. $\Gamma, A \Vdash B$ – из 2, 1 по R.2

T.8 $\Gamma \Vdash A \Leftrightarrow \Gamma \Vdash \neg\neg A$

+1. $\Gamma \Vdash A$	
2. $A \Vdash \neg\neg A$	– A.3
3. $\Gamma \Vdash \neg\neg A$	– из 1, 2 по R.2

+1. $\Gamma \Vdash \neg\neg A$	
2. $\neg\neg A \Vdash \neg\neg\neg\neg A$	– A.3
3. $\vdash \neg\neg\neg\neg A \equiv A$	– КИВ
4. $\neg\neg A \Vdash A$	– из 2, 3 по T.5
5. $\Gamma \Vdash A$	– из 1, 4 по R.2

T.9 $A, B \Vdash A \vee B$

1. $\neg A, \neg B \Vdash \neg A \& \neg B$	– A.2
2. $\neg A, \neg B \Vdash \neg\neg(\neg A \& \neg B)$	– из 1 по T.8
3. $\vdash \neg\neg(\neg A \& \neg B) \equiv A \vee B$	– КИВ
4. $\neg A, \neg B \Vdash A \vee B$	– из 3 по T.5
5. $A, B \Vdash A \vee B$	– из 4 по T.7

T.10 $\Gamma \Vdash A \Rightarrow \Gamma, B \Vdash A$

+1. $\Gamma \Vdash A$	
2. $A, B \vee \neg B \Vdash A \& (B \vee \neg B)$	– A.2
3. $\vdash A \& (B \vee \neg B) \equiv A$	– КИВ
4. $A, B \vee \neg B \Vdash A$	– из 2, 3 по T.5
5. $B, \neg B \Vdash B \vee \neg B$	– T.9
6. $B \Vdash B \vee \neg B$	– из 5 по T.7
7. $A, B \Vdash A$	– из 4, 6 по R.2
8. $\Gamma, B \Vdash A$	– из 1, 7 по R.2

T.11 $A \& B, \neg A \& B \Vdash B$

1. $A \& B, \neg A \& B \Vdash (A \& B) \vee (\neg A \& B)$	– T.9
2. $\vdash B \equiv (A \& B) \vee (\neg A \& B)$	– КИВ
3. $A \& B, \neg A \& B \Vdash B$	– из 1, 2 по T.5

T.12 B, $\neg$A&B||-A&B

1. B, $\neg(\neg$A&B)||-B&$\neg(\neg$A&B)	– A.2
2. B, $\neg$A&B||-B&$\neg(\neg$A&B)	– из 1 по T.7
3. |- B&$\neg(\neg$A&B)$\equiv$A&B	– КИВ
4. B, $\neg$A&B||-A&B	– из 2, 3 по T.5

T.13 B, A&B||-$\neg$A&B

1. B, $\neg\neg$A&B||-$\neg$A&B	– T.12
2. |-$\neg\neg$A&B$\equiv$A&B	– КИВ
3. B, A&B||-$\neg$A&B	– из 1, 2 по T.6

T.14 Γ||-A; Σ||-B $\Rightarrow$ Γ, Σ||- A&B

+1. Γ||-A	
+2. Σ||-B	
3. A, B||-A&B	– A.2
4. Γ, B||-A&B	– из 1, 3 по R.2
5. Γ, Σ||-A&B	– из 2, 4 по R.2

T.15 Γ||-A; Σ||-B $\Rightarrow$ Γ, Σ||- A$\vee$B

+1. Γ||-A	
+2. Σ||-B	
3. A, B||-A$\vee$B	– T.9
4. Γ, B||-A$\vee$B	– из 1, 3 по R.2
5. Γ, Σ||-A$\vee$B	– из 2, 4 по R.2

T.16 Γ, A&B||-C $\Rightarrow$ Γ, A, B||-C

+1. Γ, A&B||-C	
2. A, B||-A&B	– A.2
3. Γ, A, B||-C	– из 1, 2 по R.2

T.17 Γ, A$\vee$B||-C $\Rightarrow$ Γ, A, B||-C

+1. Γ, A$\vee$B||-C

2. $A, B \Vdash A \vee B$ – T.9
3. $\Gamma, A, B \Vdash C$ – из 1, 2 по R.2

T.18 $A, B \Vdash A \oplus B$
1. $A, \neg B \Vdash A \& \neg B$ – A.2
2. $\neg A, B \Vdash \neg A \& B$ – A.2
3. $A, B \Vdash A \& \neg B$ – из 1 по T.7
4. $A, B \Vdash \neg A \& B$ – из 2 по T.7
5. $A, B \Vdash (\neg A \& B) \vee (A \& \neg B)$ – из 3, 4 по T.14
6. $A, B \Vdash A \oplus B$ – из 5 по Def.3

T.19 $A, A \oplus B \Vdash B$
1. $A, A \oplus B \Vdash A \& (A \oplus B)$ – A.2
2. $\vdash A \& (A \oplus B) \equiv A \& \neg B$ – Def.3, КИВ
3. $A, A \oplus B \Vdash A \& \neg B$ – из 1, 2 по T.5
4. $\neg A, A \oplus B \Vdash \neg A \& (A \oplus B)$ – A.2
5. $\vdash \neg A \& (A \oplus B) \equiv \neg A \& B$ – Def.3, КИВ
6. $\neg A, A \oplus B \Vdash \neg A \& B$ – из 4, 5 по T.5
7. $A, A \oplus B \Vdash \neg A \& B$ – из 6, A.1 по T.7
8. $A, A \& \neg B \Vdash A \& B$ – T.12
9. $A \& B, \neg A \& B \Vdash B$ – T.11
10. $A, A \& \neg B, \neg A \& B \Vdash B$ – из 8, 9 по R.2
11. $A, A \oplus B, \neg A \& B \Vdash B$ – из 3, 10 по R.2
12. $A, A \oplus B \Vdash B$ – из 7, 11 по R.2

T.20 $\{A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_k\} \Vdash A_i$
1. $A_i \Vdash A_i$ – T.1
2. $\{A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_k\} \Vdash A_i$ – из 1 k-1-кратным применением T.10

Лемма доказана.

Следующая теорема дает утвердительный ответ на вопрос о том, достаточны ли принятые нами способы умозаключений для представления всех возможных выводов, которые согласуются с альтернативным понятием следования?

Теорема о полноте логики ACL. Если $\Gamma \| \!= A$, то $\Gamma \| \!- A$.

Рассмотрим случай, когда $\Gamma = \varnothing$. По условию теоремы существует такая булева функция $f: \{\varnothing\} \to \{0,1\}$, что для произвольного приписывания $v \in Val$ имеет место. $v(A) = f(\varnothing)$. Это означает, что функция **f** – константная.

[1] $f(\varnothing)=1$

1. $\mid\!- A \vee \neg A \equiv A$	
2. $\|\!- A$	– из 1, A.1 по T.5

[2] $f(\varnothing)=0$

1. $\mid\!- A \& \neg A \equiv A$	
2. $A \& \neg A \; \|\!- A$	– из 1 по R.1
3. $\neg(A \& \neg A) \; \|\!- A$	– из 2 по T.7
4. $\mid\!- A \vee \neg A \equiv \neg(A \& \neg A)$	– КИВ
5. $A \vee \neg A \; \|\!- A$	– из 4 по T.6
6. $\|\!- A$	– из 5, A.1 по R.2

Пусть $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_k\}$, и существует такая булева функция **f**, что для произвольного приписывания истинностных значений v имеет место $v(A) = f(v(B_1), \ldots, v(B_k))$. Это означает, что существует состоящая из формул $B_1, \ldots, B_k$ булева комбинация A’, которая эквивалентна A.

Доказательство будем проводить индукцией по степени формулы A’, рассматривая формулы $B_1,\dots,B_k$ как атомарные, т.е. не интересуясь их внутренней структурой.

Всего возможны четыре случая:

[3] $A' = B_i$, $\quad f(v(\Gamma)) = v(B_i)$

1. $B_i \Vdash B_i$	– T.1
2. $B_1,\dots,B_k \Vdash B_i$	– из 1 по T.10

[4] $A' = \neg B$, $\quad f(v(\Gamma)) = 1 - g(v(\Gamma))$

+1. $\Gamma \Vdash B$	– инд. доп.
2. $\Gamma \Vdash \neg B$	– из 1 по T.8

[5] $A' = B\&C$, $\quad f(v(\Gamma)) = \min(g(v(\Gamma)), h(v(\Gamma)))$

+1. $\Gamma \Vdash B$	– инд. доп.
+2. $\Gamma \Vdash C$	– инд. доп.
3. $B, C \Vdash B\&C$	– A.2
4. $\Gamma \Vdash B\&C$	– из 1, 2, 3 по R.2

[6] $A' = B \vee C$, $\quad f(v(\Gamma)) = \max(g(v(\Gamma)), h(v(\Gamma)))$

+1. $\Gamma \Vdash B$	– инд. доп.
+2. $\Gamma \Vdash C$	– инд. доп.
3. $B, C \Vdash B \vee C$	– T.9
4. $\Gamma \Vdash B \vee C$	– из 1, 2, 3 по R.2

Теорема доказана.

Представление логики альтернативного следования в виде набора выводимостей удобно для большей наглядности свойств анализируемого отношения. При построении реальных рассуждений более естественно представить логику в виде системы натурального вывода.

Натуральная формулировка логики ACN

Правила вывода:

N.1 $\Rightarrow A \vee \neg A$
N.2 $A \Rightarrow \neg A$
N.3 $A, B \Rightarrow A \& B$
N.4 $\vdash A \equiv B;\ A \Rightarrow B$

Def.7 *Выводом* из множества формул Г формулы А в логике **ACN** называется непустая конечная последовательность формул $<A_1, A_2, \ldots, A_k>$, каждая из которых либо принадлежит множеству Г, либо получена из предыдущих формул последовательности по одному из правил вывода N.1-N.3, либо классически эквивалентна одной из предыдущих формул последовательности, и конечным элементом последовательности является формула А (A_k=A).

Доказательство эквивалентности двух формулировок не представляет никакой трудности. Легко показать, что выводимость Г||-А доказуема в **ACL**, е. и т. е. существует натуральный вывод формулы А из множества формул Г в логике **ACN**.

Мы специально не называем множество формул Γ множеством гипотез, так как понятие гипотезы несет ненужную смысловую нагрузку, предполагая, по крайней мере, веру в ее истинность. Для нас же истинностные значения формул множества Γ не важны.

VI. ПРОТОЛОГИКА

Наша следующая цель – найти то общее, что объединяет логику классического и альтернативного отношения следования. Решить эту задачу можно путем последовательного обеднения языка до тех пор, пока не сотрутся различия двух логик. То, что останется после этого, можно назвать протологикой.

Поскольку построенная выше пропозициональная логика ACL отлична от классической, мы должны исключить из рассмотрения логические связки. Но как быть с субъектно-предикатной структурой простых предложений, лежащей в основе силлогистической теории Аристотеля? Имеются ли различия между двумя отношениями следования на этом уровне? Покажем, что ответ на этот вопрос положительный.

Фиксируем язык.

1. m, p, q, r, s – символы для представления общих терминов;
2. A, E, I, O – функторы.

Определение формулы.

1. Если s и p – общие термины, то Asp, Esp, Isp, Osp – формулы;
2. Ничто другое формулой не является.

Моделью для этого языка будем называть пару M=<W,v>, где W – множество, содержащее не менее двух элементов, а v – функция приписывания общим терминам непустых и неуниверсальных подмножеств W. Т.е. мы рассматриваем случай простой традиционной силлогистики.

Определим для формул нашего языка их *значение в модели* ***M***.

$$\mathbf{M}[\mathrm{Asp}] = \begin{cases} 1, \text{ если } v(s) \subseteq v(p); \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

$$\mathbf{M}[\mathrm{Esp}] = \begin{cases} 1, \text{ если } v(s) \cap v(p) = \varnothing; \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

$$\mathbf{M}[\mathrm{Isp}] = \begin{cases} 1, \text{ если } v(s) \cap v(p) \neq \varnothing; \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

$$\mathbf{M}[\mathrm{Osp}] = \begin{cases} 1, \text{ если } v(s) \not\subseteq v(p); \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

При классическом определении логического следования по Тарскому

$$\Sigma \models A \Leftrightarrow \forall \mathbf{M}(\forall B(B \in \Sigma \Rightarrow \mathbf{M}[B]=1) \Rightarrow \mathbf{M}[A]=1)$$

мы получим простую традиционную силлогистику. При альтернативном определении следования

$$\{B_1,..,B_k\} \Vdash A \Leftrightarrow \exists f \forall \mathbf{M}(\mathbf{M}[A]=f(\mathbf{M}[B_1],.., \mathbf{M}[B_k]))$$

мы получим другую логическую систему, которую назовем **ASL**. Если представить ее в виде набора выводимостей, то среди аксиом и правил вывода окажутся:

S.1 ||-Ass
S.2 ||-Ess
S.3 Asp||-Osp
S.4 Osp||-Asp
S.5 Esp||-Isp
S.6 Isp||-Esp
S.7 Isp||-Ips
S.8 $\{A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_k\}$||-$A_i$

RS.1 Σ||-B; Γ, B||-A ⇒ Γ,Σ||-A

Покажем, что приведенные аксиомы удовлетворяют альтернативному определению логического следования, а правила вывода сохраняют его.

Теорема о непротиворечивости ASL. Если Γ||-A, то Γ||=A.

Для начала проверим аксиомы S.1-S.7. Возьмем произвольную модель M=<W,v>.

S.1 Так как $v(s)\subseteq v(s)$, то M[Ass]=1. Поэтому в качестве функции **f** достаточно взять нульместную константную функцию **1**.

S.2 Так как $v(s)\cap v(s) = v(s) \neq\varnothing$ в силу определения функции v в модели, то M[Ess]=0. Поэтому в качестве функции **f** достаточно взять нульместную константную функцию **0**.

S.3 Так как $M[Asp]=1 \Leftrightarrow M[Osp]=0$, то в качестве функции f достаточно взять одноместную функцию 1-x.

S.4-S.6 доказываются аналогично S.3.

S.7 Так как $v(s) \cap v(p) = v(p) \cap v(s)$, то в качестве функции f достаточно взять одноместную тождественную функцию $id(x)=x$.

S.8 Для этой аксиомы в качестве функции f достаточно взять функцию проекции $pr_i(x_1,\dots,x_i,\dots,x_k)=x_i$.

Проверим единственное правило вывода.

RS.1

+1. $M[B] = f(M[\Sigma])$

+2. $M[A] = g(M[B],M[\Gamma])$

3. $M[A] = g(f(M[\Sigma]),M[\Gamma])$ – из 1, 2 подстановкой

Теорема доказана.

Легко показать, что в системе ASL не имеют места двухпосылочные модусы традиционной силлогистики. Продемонстрируем это на примере модуса Barbara, по которому из двух посылок Amp и Asm выводится заключение Asp.

На следующих двух круговых диаграммах приведены две интерпретации общих терминов s, m и p в двух моделях – M1 и M2.

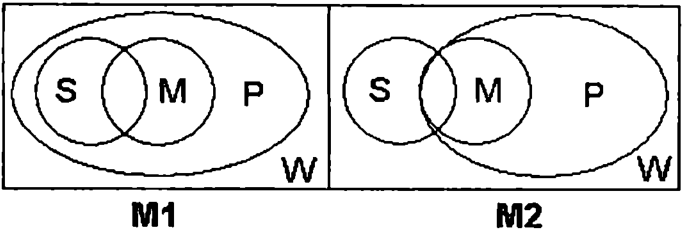

Рис. 4

Согласно определению, в этих моделях посылкам и заключению сопоставлены следующие значения:

M1(Asm)=0, M1(Amp)=1, M1(Asp)=1
M2(Asm)=0, M2(Amp)=1, M2(Asp)=0

Так как в обеих моделях посылкам сопоставлены одинаковые значения, а заключению разные, то отсюда следует, что не существует такой функции f, что $\forall M(M[Asp]=f(M[Asm],M[Amp]))$, т.е. $Amp,Asm||\neq Asp$.

Поскольку в дополнение к этому еще и выводимости S.2-S.6 не имеют места в традиционной силлогистике, классическое и альтернативное понятия логического следования определяют разные отношения между предложениями с субъектно-предикатной структурой.

Совершим следующий шаг в обеднении языка, отказавшись различать внутреннюю субъектно-предикатную структуру предложений. Можно ли говорить о существовании какой-то логики для такого языка? Как ни странно, но даже у такого бедного языка она есть.

Обратим внимание на формулы и правила вывода, доказуемые в классической логике, силлогистике, логике **ACL** и логике **ASL**. Легко заметить, что правило R.2 логики **ACL** и правило RS.1 логики **ASL** совпадают с хорошо известным структурным правилом сечения, используемым при построения выводов в силлогистике и в классической логике. Теорема T.20 логики **ACL** и аксиома S.8 логики **ASL** также совпадают с одним из свойств отношения выводимости классической логики – Σ, A|-A. Очевидно также, что общим для классического и альтернативного отношения следований является правило добавления посылок, т.е. переход от Σ|-A к Σ,B|-A. Они никак не зависят от особенностей конкретного языка, а определяются исключительно свойствами отношения следования. Для нас же в данном случае важно то, что они допускаю двойную интерпретацию – как следование по истинности и как функциональное отношение.

Следование по истинности.

1. Если истинны все формулы $\{A_1,\dots,A_i,\dots,A_k\}$*, то истинна и формула* A_i.

2. Если при истинности формул множества Σ *истинна формула* B*, и при истинности формул множества* $\Gamma\cup\{B\}$ *истинна формула* A*, то при истинности формул множества* $\Gamma\cup\Sigma$ *формула* A *также будет истинна.*

3. Если при истинности формул множества Σ *истинна формула* A*, то при истинности формул множества* $\Sigma\cup\{B\}$ *формула* A *также будет истинна.*

Функциональное отношение.

1. Если известны значения формул $\{A_1,\dots,A_i,\dots,A_k\}$*, то посредством функции проек-*

ции pr_i всегда можно получить значение формулы A_i.

2. Если существует функция $f(...,...)$, вычисляющая значение формулы B на основании значений формул Σ, и существует функция g, вычисляющая значение формулы A на основании значений формул $\Gamma\cup\{B\}$, то композиция $g(...f)$ этих двух функций позволяет вычислить значение формулы A на основании значений формул $\Gamma\cup\Sigma$.

3. Если существует функция f, вычисляющая значение формулы A на основании значений формул Σ, то посредством композиции функций проекции pr_i и f можно определить функцию, которая вычисляет значение формулы A на основании значений формул множества $\Sigma\cup\{B\}$.

Заметим, что в случае альтернативной/вычислительной интерпретации мы имеем дело, во-первых, с проекцией – одной из базисных функций, участвующих в определении по Клини множества вычислимых функций, и, во-вторых, с правилом композиции, позволяющим из более простых функций получать более сложные, также участвующим в упомянутом определении множества вычислимых функций.

Таким образом, мы получили логику, которая задается аксиомой-выводимостью

PA. $\Sigma, A|\text{-}A$

и двумя правилами перехода от одних выводимостей к другим

PR.1 $\Sigma|\text{-}B; \Gamma, B|\text{-}A \Rightarrow \Gamma, \Sigma|\text{-}A$

PR.2 $\Sigma|\text{-}A \Rightarrow \Sigma, B|\text{-}A$

Легко показать, что в протологике, единственной аксиомой которой является PA, правила PR.1 и PR.2 допустимы.

Можно предположить, что язык и способы рассуждений в ходе своей эволюции проходили своеобразную точку бифуркации, в которой производился выбор дальнейшего пути развития. Приходилось выбирать, чему отдать предпочтение – дескриптивной или процедурной интерпретации языковых выражений. Выбор в пользу первого естественным образом приводил к истинностнозначной логике, выбор в пользу второго – к развитию вычислений. На роль точки бифуркации подходит допускающая двойную интерпретацию протологика. Ее отголоски мы слышим в восклицании «Эврика!» («Смотри!»), которое очень напоминает применение правила $\{A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_k\}||\text{-}A_i$, заключающегося в простом предъявлении одной из уже принятых посылок.

В то же время, несмотря на очевидный крен в дескриптивную сторону, многие логические элементы языка сохранили процедурное (функциональное) понимание. Первый пример – это некоммутативный союз «*и*». Предложение «*Мэри вышла замуж и родила ребенка*» с точки зрения классической логики эквивалентно предложению «*Мэри родила ребенка и вышла замуж*». Однако такое понимание не соответствует нашей языковой интуиции, и вряд ли кто согласится, что смысл этих предложений одинаков. Союз «*и*» в этих примерах понимается скорее как операция сочленения/композиции последовательных действий «*Мэри вышла замуж*»$\circ$«*Мэри родила ребенка*». Другим примером является союз «*если..., то...*». Люди, незнакомые с логикой, часто понимают его как представляющий причинную или процедурную связь между тем, что описывается в предложениях. Лишь после изучения стандартного курса логики они, наконец, узнают, что предложение «*Если число 5 делится на 4, то оно делится на 2*» истинно в силу специальной истинностнозначной интерпретации «*если..., то...*».

VII. ДЕДУКЦИЯ VS ВЫЧИСЛЕНИЯ

В этом параграфе мы попробуем сравнить два вида доказательств – доказательство как дедукцию из аксиом с сохранением свойства истинности предложений и доказательство как решение вычислительной задачи. Геометрические построения с помощью циркуля и линейки в силу их конструктивной, алгоритмической природы являются частным примером вычислительных задач.

Обратимся к книге [1], где пишется о так называемой рецептурой математике.

«Если бы вы обучались в школах Древнего Востока, то никаких навыков рассуждений вы бы не получили. Ведь даже математические знания на Древнем Востоке добывали и обосновывали без строгих рассуждений, т.е. без доказательств! Вместо доказательств учащиеся должны были усваивать разнообразные инструкции по решению математических задач. Это были своего рода рецепты получения ответов, поэтому такую математику и называют рецептурной. Как убедиться, что рецепт правильный, что он ведет к истинному ответу на вопрос задачи? Во многих случаях древневосточные математики ссылались на чувственный опыт, провозглашая принцип: "Гляди, смотри"» [1, с. 13].

Создается впечатление, что автор, преклоняясь перед красотой идеала доказательной математики, невольно недооценивает достижения математики Древнего Востока. В качестве альтернативного можно привести мнение Н.Бурбаки [6, с. 10].

«Теперь уже нельзя сомневаться в существовании сильно развитой доэллинской математики. Не только понятие целого числа и меры величины (сами по себе уже очень абстрактные) употребляются в самых древних из дошедших до нас текстах Египта и Халдеи, но и вся вавилонская алгебра с ее изящными и уверенными приемами не может рассматриваться в виде простой совокупности задач, решенных эмпирически, на ощупь. И если в текстах мы еще не находим ничего похожего на "доказательства" в формальном смысле слова, все же имеются все основания полагать, что открытие таких приемов решения, общность которых видна из частных применений к числовым примерам, не могло иметь места без хотя бы минимального количества логических рассуждений».

С Н.Бурбаки солидарен и историк математики А.П.Юшкевич [48, с. 50].

«...слова "доказательство" и "наука", если их рассматривать в историческом аспекте, не имеют однозначного смысла, и в разное время в них вкладывалось разное содержание. Отказывать математике Египта и Вавилона в их наименовании наукой потому, что в их письменных памятниках нет доказательств, столь же неосновательно, как исключать из живописи импрессионизм или абстрактную школу, т.к. они "нереалистичны", а из поэзии творчество Элюара или Хлебникова, так как они непохожи на Верлена или Блока. Сказанное относится также к древним математическим текстам Китая и Индии».

Роль дедуктивных доказательств в истории науки и математики вовсе не столь велика, как это может показаться. Гораздо чаще их применяют постфактум для реконструкции и обоснования ранее полученных результатов, а не в качестве рабочего инструмента.

«Труды Аристотеля и его преемников, по-видимому, не оказали заметного влияния на математику. Греческие математики в своих исследованиях шли по пути, проложенному пифагорейцами и их последователями в IV в. (Теодором, Тэететом, Евдоксом), и мало интересовались формальной логикой при изложении своих результатов. Это не должно вызывать удивления; достаточно сравнить гибкость и точность изложения математических рассуждений, которое имело место начиная с этого периода, с весьма рудиментарным состоянием аристотелевской логики» [6, с. 14].

Можно привести и более свежие примеры. Достаточно вспомнить историю возникновения математического анализа, который давно и с успехом применяется для решения сложнейших задач, но обоснование получил лишь через триста лет после своего появления.

Но не противоречит ли Н.Бурбаки самому себе, говоря о гибкости и точности изложения математических рассуждений при рудиментарном состоянии логики? Возможно ли это? Да, возможно, если не сводить логику к обычной дедукции. Наряду с дедуктивной, не меньшее право на существование имеет вычислительная математика. Возможно, если бы влияние эллинизма не было исторически столь сильным и подавляющим, на Востоке развилась бы именно вычислительная математика, тем более что к этому уже были практические предпосылки.

«...числа древними представлялись наглядно, например, как ряды камешков или наборы геометрических точек. Результат сложения чисел n и m мог быть получен путем подсчета соответствующего числа камешков или точек» [1, с. 13].

Представление чисел камешками или точками уже было некоторой абстракцией числа. Т.е. конкретный материальный носитель не был важен, он всего лишь служил для наглядного представления числа. Результат, полученный с помощью камешков, затем переносился на яблоки, рабов, мешки с мукой и пр. Как не вспомнить машину Тьюринга, в наглядной модели которой числа представляются посредством черточек на бумажной ленте, и *результат сложения чисел n и m получается путем подсчета соответствующего числа* черточек. Вот как описываются правила вычисления на абаке – древнем вычислительном устройстве, появившемся у греков в IV веке до нашей эры, т.е. именно во времена походов Александра Македонского.

«...будем представлять себе "обычные" компьютеры устроенными примитивно, на уровне каменного века. Его регистры мы представляем себе как емкие нумерованные ящики, способные вместить произвольное число камешков – ни одного, один, два и т.д., так что [n] есть число камешков в ящике с номером n. В роли "машины" действует человек, способный к выполнению двух видов операций: добавить один камешек к их груде, лежащей в ящике с номером n, и забрать один камешек из груды, лежащей в ящике с номером n, если там вообще есть хоть что-нибудь» [5, с. 82].

Далее там же доказывается, что с помощью такого «примитивного» устройства вычислимы все (!) рекурсивные функции. Народам Древнего Востока нужно было и дальше упражняться в счете на абаке, но на их беду пришли эллины со своими взглядами на то, что достойно внимания «истинного» ученого, а что – нет, и занятие счетом было прервано.

«...наставники более мудры не благодаря умению действовать, а потому, что они обладают отвлеченным знанием» [Метафизика, I, 1, 981b 5].

Ученые рассуждали о вечных идеях, а счет был отдан людям более низкого звания. Понадобилось пройти двум с половиной тысячелетиям, чтобы искусство счета стало предметом научного анализа, и возникла теория вычислимых функций. Поэтому весьма спорными являются следующие утверждения.

«Мы вовсе не хотим сказать, что рецептурное знание не имеет права на существование. Оно со свойственной ему практической направленностью способно сильно облегчить нам жизнь. Но от этого знание такого рода не перестало быть бездоказательным знанием. Одним из отличительных признаков научного знания является доказательность. Отсюда получается, что рецептурное знание, в частности, рецептурная математика Древнего Востока, науки не образует и наукой не является. Математика стала наукой лишь тогда, когда древние греки открыли идею математического доказательства» [1, с. 14–15].

«В отказе считать древневосточную математику наукой ничего удивительного нет. В наши дни, например, мы не считаем деятельность программиста разновидностью работы ученого. Программирование чаще всего оказывается разработкой рецептов решения тех или иных задач с помощью ЭВМ, однако правильность самих рецептов (т.е. компьютерных программ) обычно не доказывается. Поэтому, несмотря на то, что построение сложных программ требует развитой способности рассуждать (в отличие от древней восточной математики, не требовавшей рассуждений вооб-

ще), программирование – это скорее высокотехнологическое искусство, чем наука. Но есть теоретики программирования, изучающие способы доказательства правильности программ. Такие исследования уже могут претендовать на научный статус» [1, с. 115].

Итак, можно ли считать вычисление (построение) доказательством?

Представим себе следующую ситуацию. Логику и Вычислителю (Программисту) предлагается решить одну и ту же задачу из области геометрии на плоскости – доказать, что для произвольного отрезка АВ можно построить равносторонний треугольник АВС. Это первая теорема «Начал» Евклида, хорошо известная всем из школьного курса геометрии.

Через некоторое время после получения задания Логик сообщает, что доказал формулу

Если Отрезок(АВ), то существует такой Треугольник(АВС), что АВ=ВС и АВ=АС.

Вычислитель же (Программист) в качестве доказательства предъявляет на бумаге (на экране монитора) чертеж.

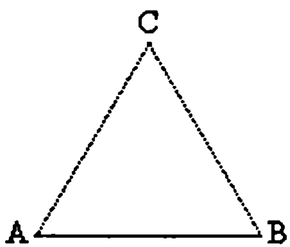

Рис. 5

Логик заявляет, что не принимает этот чертеж в качестве доказательства и требует настоящего доказательства. Тогда Вычислитель (Программист) предъявляет Логику последовательность чертежей 1-6 (запускает компьютерную программу, последовательно выполняющую требуемое построение), которые, по его мнению, как раз и служат доказательством того, что задача имеет решение.

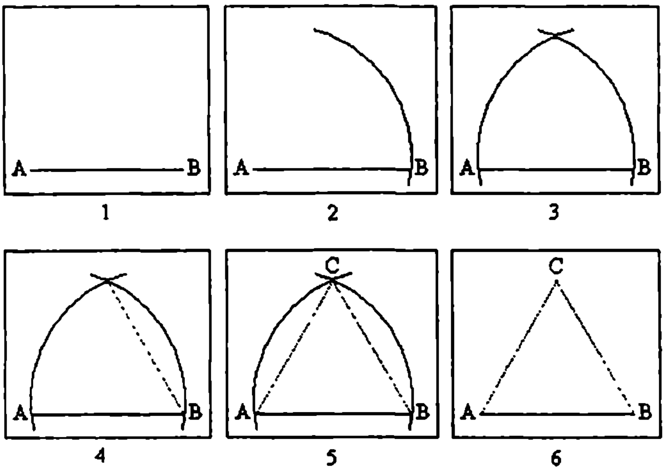

Рис.6

Логик настаивает, что если эти чертежи считать доказательством, то необходимо доказать правильность выполнения каждого шага в терминах предусловий и постусловий, как это делается при доказательстве правильности программ. Вычислитель (Программист) сперва возражает, но затем сдается и предъявляет Логику требуемое логическое доказательство правильности каждого шага построения, убеждая его, что все выполнено правильно. Логик торжествует, будучи уверен, что без понятия логического доказательства в науке нельзя сделать и шагу. Но тут в наступление переходит Вычислитель (Программист). Он в свою очередь просит у Логика предъявить доказательство теоремы. В ответ на эту просьбу Логик предъявляет *непустую конечную последовательность формул, каждая из которых либо аксиома геометрии, либо получена из предыдущих формул последовательности по одному из правил вывода. Заключительной формулой этой последовательности является доказываемая теорема*. Зная, что и математики, и логики тоже люди и тоже могут ошибаться, Вычислитель (Программист) просит доказать, что предложенное доказательство является правильным. В ответ на это Логик напротив каждой формулы доказательства пишет ее обоснование – является ли она аксиомой геометрии, получена ли она из предыдущих формул по одному из правил вывода, и если да, то по какому конкретно. После этого Логик говорит: «Эврика! Смотри»! Вычислитель (Программист) остается неудовлетворен. Он говорит, что видит перед собой всего лишь протокол выполнения определенного алгоритма (программы), но никакого доказательства ему не предъявлено, что, в конце концов, формально его алгоритм (программа) также является непустой последовательностью операторов, каждый из которых элементарен, но в совокупности они приводят к требуемому построению. Если Логик не считает деятельность Вычислителя (Программиста) научной, то какое он имеет право обосновывать свои научные доказательства ненаучными алгоритмическими средствами? Последовательность чертежей 1–6 обоснована ничуть не хуже, чем предъявленное доказательство логической теоремы. Каждый переход в цепочке 1–6 совершен посредством выполнения элементарного преобразования чертежа, заключающегося либо в проведении дуги заданного радиуса (1–2, 2–3), либо в соединении двух точек прямой (3–4, 4–5). Результат же – равносторонний треугольник.

Логик оказывается в трудной ситуации. Если он станет опять же посредством логики обосновывать правильность своего выполнения алгоритма построения доказательства, то попадет в порочный круг, так как Вычислитель (Программист) со всеми на то основаниями попросит его обосновать и это новое доказательство, и так ad infinitum. Кроме этого Вычислитель (Программист) выдвигает новое требование, заявляя, что в логике одной лишь последовательности формул, удовлетворяющей определению доказательства, мало, чтобы считать теорему имеющей какую-то ценность. Необходимо дополнительно обосновать совместную непротиворечивость используемых аксиом. Если условие непротиворечивости не выполнено, то для всякой формулы и ее отрицания всегда можно найти подходящую цепочку других формул, которая удовлетворяет определению доказательства.

Оставим Вычислителя (Программиста) и Логика препираться друг с другом или совместными усилиями искать взаимоприемлемое решение проблемы. Для себя же констатируем, что как ни странно, но обоснование формальной правильности логического доказательства мы действительно получаем путем обращения к алгоритмическим, но не логическим операциям. Так может быть не стоит отказывать понятию вычисления в его глубинной логической природе? Если мы с этим согласимся, то должны будем признать, что *деятельность программистов является разновидностью работы ученого* и заключается в ежедневном доказательстве разнообразных теорем, что програмисты делают это, даже не подозревая, чем на самом деле занимаются.

VIII. ТЕОРИИ НА ОСНОВЕ АЛЬТЕРНАТИВНОГО СЛЕДОВАНИЯ

Классическая логика интересна не только сама по себе, но и потому, что на ее основе мы можем строить теории, принимая в качестве дополнительных аксиом формулы, несущие информацию о свойствах конкретной предметной области. Возможны ли аналогичные построения на основе логики ACL? Да, возможны. Для построения теорий на базе логики ACL мы добавляем к логическим аксиомам-выводимостям дополнительные постулаты-выводимости, а на уровне семантики каждому такому постулату сопоставляем свою булеву функцию, позволяющую вычислить истинностное значение заключения на основе истинностных значений посылок.

$$
\begin{array}{ll}
\Sigma_1 \| \text{-} A_1 & \quad - \; A_1 = f_1 \circ \Sigma_1 \\
\Sigma_2 \| \text{-} A_2 & \quad - \; A_2 = f_2 \circ \Sigma_2 \\
\ldots & \\
\Sigma_n \| \text{-} A_n & \quad - \; A_n = f_n \circ \Sigma_n
\end{array}
$$

Как частный случай, множества формул Σ_i могут быть пусты, и тогда функции f_i являются константными. Если сравнить это построение с построением теорий в классической логике, то можно провести следующее различие. В классической логике, добавляя новые аксиомы, мы ограничиваем множество моделей, в которых они истинны, и тем самым увеличиваем информативность теории. При этом всегда есть риск, что система нелогических аксиом окажется внутренне противоречивой и тем самым вся теория окажется тривиальной. В логике **ACL** ситуация несколько иная. Каждая новая аксиома в ней содержит информацию о том, как связать булевой функцией посылки и заключение. Если теории на базе классической логики можно назвать теориями *знания*, то теории на базе **ACL** являются теориями *умений*. Каждая новая аксиома-выводимость фиксирует некоторое *умение*. На семантическом уровне **ACL**-теория – это некоторое множество алгоритмов, определяющих класс допустимых преобразований над объектами предметной области, а не просто множество моделей, в которых истинны аксиомы теории, как это имеет место в случае классической логики.

Если в качестве одного из обязательных признаков научного знания принять его доказательность в том же смысле, как понимал его Аристотель, и понимают его последователи вплоть до сегодняшнего дня, то вполне естественно, что математика Древнего Востока этими характеристиками не обладает. Но выше мы уже показали, что классическое определение отношения следования базируется на вполне определенных и давно устаревших философских предпосылках, имеет много недостатков и никоим образом не может претендовать на роль Богом данного и единственно правильного. Реальной альтернативой является логика, отношение следования в которой имеет вычислительную природу. Путем построения выводов в такой логике легко синтезировать правила сложных вычислений на основе набора более простых. Вряд ли можно оспаривать тезис о том, что наука должна быть доказательной, но не следует сводить при этом понятие доказательства к тому специальному виду, как его понимали древние греки. В конце концов, следует исходить из той функции, которую выполняет в научной практике понятие доказательства, а не упорствовать в признании лишь того определения, которое было дано две с половиной тысячи лет назад. Почему не допустить, что могут существовать процедуры рассуждения с другим типом обоснования, но выполняющие ту же функцию, что и обычные дедуктивные рассуждения? В противном случае «Начала» Евклида не принадлежат математике.

«... математика не есть только теоретическая дедуктивная наука в смысле Аристотеля. ... исторически построение алгоритмов предшествовало созданию математических теорий. Но для построения алгоритмов, уже самых древних, связанных, например, с оперированием с целыми числами и с дробями, с решением различных классов арифметических и геометрических задач, оказалось необходимым введение новых понятий, таких, как понятия числа, дроби, площади, объема, сложения, умножения и многих других, а также выяснение свойств и законов операций с числами и многих других вопросов познавательного характера, образующих элементы научного знания, научной теории, для которой прежде всего характерна возможность использовать одни знания (непосредственно данные нам посылки) для получения из них других – заключений. Нетрудно показать, что вопреки распространенному на этот счет мнению с такого рода элементами научной теории мы встречаемся уже у древних египтян и вавилонян. Роль же древних греков состояла, скорее, в том, что они построили теорию таких теорий – теорию доказательства, в соответствии с которой и создавали уже стройные математические системы. Однако первенство правила (алгоритма) над теоремой сохранялось

в математике еще очень долго. Достаточно открыть, например, сочинения Декарта, Ньютона и даже такого "чистого" логика, как Лейбниц, чтобы убедиться в этом» [49, с. 170–171].

Идея проникновения в логику понятия алгоритма далеко не нова, но до сих пор не получила должной реализации. Обратимся к работе Владимира Александровича Смирнова [31], в которой он рассматривает генетический метод построения научных теорий. Его интересуют общие принципы построения теорий, суть которых он видит в следующем.

«При генетическом подходе отправляются как от исходного от некоторых налично данных объектов и некоторой системы допустимых действий над объектами. В генетической теории процесс рассуждения представлен в "форме мысленного эксперимента о предметах, которые взяты как конкретно наличные"» [31, с. 423].

Задавшись вопросом *«Существует ли вообще аксиоматическое исчисление, полностью формализующее генетическую систему мышления?»* [31, с.429], возможным ответом он считает логическое представление теории рекурсивных функций.

«Но такой путь уточнения генетического метода построения научных теорий приводит нас к необходимости расширить область логического и сделать предметом изучения логики такие элементы, как действия, аналогично тому, как это имело место с отношениями, и такие формы мысли, как предписания и системы предписаний (алгоритмы). В этой связи ясно, что система общерекурсивных функций (или эквивалентные им

уточнения, как нормальный алгорифмы Маркова, машины Тьюринга и т.д.) являются логическими формализмами, т.е. формализмами, представляющими логический процесс в широком смысле. В таком случае под логическим мы понимаем не только доказательство (обоснование одних высказываний посредством других), но и процесс сведения одних "стратагем действия" к другим» [31, с. 430].

История науки убеждает в том, что генетический подход к построению теорий вовсе не экзотика, а имеет глубокие корни.

«Если мы обратимся к истории, то увидим, что так же как и аксиоматический, генетический метод имеет далекую родословную. В частности, мы считаем, что метод "Начал" Евклида и дедуктивный метод Декарта ближе к генетической форме дедуктивного метода, чем к аксиоматической.

Обращаясь к античному миру, – а в нем умозрительный, дедуктивный метод был господствующим, – мы обнаруживаем не одну, а три концепции дедуктивного метода, три теории доказательств: платоновскую, аристотелевскую и евклидову. Первые две можно рассматривать как прототипы современного аксиоматического метода. Но концепция, проводимая в "Началах" Евклида, скорее является прототипом генетического метода, чем аксиоматического, хотя впоследствии "Начала" Евклида толковались в духе аксиоматического метода. Тот факт, что "Начала" Евклида не являются прототипом осуществления аксиоматического метода, осознается рядом логиков и математиков.

...Для Евклида изучаемые геометрические объекты не имеют идеального существования. Он не предписывал геометрическим объектам идеального существования, как это делал Платон.

Евклид исходит из элементарных объектов (точки, отрезки) и определенных операций, посредством которых образуются из первичных элементов объекты теории. Постулаты и выражают возможность осуществления определенных операций» [31, с. 431–432].

В подтверждение этому напомним трактовку Евклидом знаменитого пятого постулата. Мы привыкли к его современной формулировке: «*В плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну, и только одну прямую, параллельную данной*». Это утверждение о существовании прямой, удовлетворяющей следующему определению, взятому из «Начал».

«Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той ни с другой стороны между собою не встречаются» [26, с. 14].

Оно не постулирует существования параллельных прямых. Мысль Евклида гораздо тоньше. Аксиому параллельности он формулирует как аксиому построения *непараллельных* прямых.

«И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых» [26, с. 15].

Если бы Евклид воспользовался современной формулировкой аксиомы, то построение бесконечной прямой, параллельной данной, никогда не было бы завершено. Поэтому он и задает ее именно в форме завершаемого построения. Слова же *продолженные неограниченно* означают лишь то, что в самой аксиоме не постулируется, на каком расстоянии произойдет искомое пересечение. Все упреки в адрес Евклида, что данная им формулировка пятого постулата слишком сложна, совершенно не учитывают ее конструктивный характер.

До сих пор логика развивалась как дескриптивная в своей основе, и лишь относительно недавно с возникновением интуиционизма и конструктивного направления в математике был совершен отход от этого. Тем не менее, на наш взгляд, решения, предлагаемые в рамках этих направлений, половинчаты. Они всего лишь покусились на критерий истинности. От вечных платоновских идей теперь требуют конструктивной истинности. Кажущаяся новаторской трактовка импликации преследует очевидную цель – если конструктивно истинен ее антецедент, то конструктивно истинным должен быть и консеквент. Отсюда и ворох проблем, доставшихся в наследство от классической логики.

История не знает сослагательного наклонения, но если бы Платону и Аристотелю не было свойственно пренебрежительное отношение к изменяющемуся миру явлений, и если бы последующие поколения не были склонны столь послушно принимать все, что было сказано их предшественниками, пусть даже и великими, то и будущее развитие науки и культуры могло бы пойти совсем в другом направлении. Нас бы сейчас не волновали многие псевдопроблемы теории множеств и арифметики – существования бесконечных множеств, полноты и непротиворечивости (возможно, что теория множеств вообще не была бы создана, ибо она является порождением платонистического взгляда на мир), а волновали бы совсем другие проблемы, те, которые изучаются в рамках теории вычислимости – существования алгоритмов, их сложности и др. Но об этом можно только гадать, так как история не знает сослагательного наклонения.

IX. ИСТИНА В ЛОГИКЕ

Классической логике, кроме неестественного понятия следования, присущ еще один серьезный недостаток. Более двух тысяч лет над ней довлеет *проклятие истины*. *Авторитет* этого понятия настолько высок, что все развитие логики проходит как бы в его *тени*.

Традиционно считается, что человеческое познание направлено на открытие и постижение истины. Как только мы открываем новую истину, мы фиксируем ее в предложениях языка. Дальнейшей задачей логики становится ее сохранение и наиболее полное раскрытие. Именно в этом смысл теорем о непротиворечивости и полноте логических исчислений. Всякий используемый способ рассуждения должен гарантировать, что истина не будет утеряна, и мы будем иметь возможность проникнуть во все ее закоулки, потенциально извлечь все ее следствия. Логику можно сравнить со священным сосудом, который позволяет хранить и накапливать истину, передавая ее из поколения в поколение счастливым потомкам. Всякое обнаруженное противоречие можно сравнить с дыркой в этом сосуде, через которую может вытечь вся истина. Сами же логики – это жрецы истины, хранители священного сосуда.

А.С.Карпенко, давая обзор взглядов на предмет логики, пишет:

«Определение предмета логики, данное Фреге, необычайно красиво: "Логика есть наука о наиболее общих законах бытия и истины". Может показаться удивительным, что такое понимание логики продержа-

лось почти сто лет и с некоторой модификацией вошло в книгу У.Куайна "Философская логика", где предмет логики определяется как систематическое изучение логических истин» [18, с. 152].

Апофеоз преклонения перед истиной в современной европейской культуре кратко, но пафосно выразил М.Клайн [21, с.18]:

«Любая цивилизация, достойная так называться занимается поиском истин».

Мораль сей декларации проста: цивилизация лишь в том случае может называться цивилизацией, если следует по пути познания, указанному древними греками.

За прошедшие тысячелетия взгляды на истину претерпели существенные изменения. Мы уже не считаем ее существующей вечно и неизменно, появились понятия абсолютной и относительной истины, мы стали различать истинностные значения в зависимости от способа их установления, в многозначной логике мы ввели дополнительные истинностные значения и т.д. Но каждый раз мы упорно продолжаем говорить о них – об *истинностных значениях*. Можно рассматривать как анекдотическую и в определенном смысле противоречивую ситуацию, когда логики ввели новое истинностное значение – *неопределенность*, понимая под ним отсутствие истинностного значения. Существует устойчивая парадигма сведения всех логических проблем к задаче оперирования с истинностными значениями, к использованию старого проверенного понятийного аппарата даже в тех случаях, когда пригодность его сомнительна.

Можно сказать, что сами по себе понятия *истины* и *лжи* нам совершенно безразличны. В определенное время они просто оказались очень удобны для характеристики предложений языка, полезных в познавательной человеческой практике. Правда, тут же было замечено, что в некоторых ситуациях использования эти понятия приводят к парадоксам, но в целом их полезность неоспорима и сейчас. Эти понятия дают нам возможность формулировать утверждения о том, что может и чего не может быть. Это важно, так как, изучая внешний мир, мы стараемся вместо первоначального хаоса увидеть в нем закономерную связь явлений, а не простую игру случая. Всякий закон природы – это некоторый *запрет* на возможные состояния мира. В логике законы обычно представляют формулами вида $\forall x(Ax \to Bx)$. Эквивалентным образом мы можем переписать их как $\neg\exists x(Ax \& \neg Bx)$. То есть смысл данного утверждения в том, что мир не может находиться в таком состоянии, в котором истинно утверждение Ax, но ложно утверждение Bx. Сам процесс познания можно представить как процесс отсечения, отбрасывания на теоретическом уровне тех состояний, которые мы считаем принципиально неосуществимыми. Чем больше таких запретов на возможные состояния мира мы обнаружим, тем больше мы будем знать о нем. С этой точки зрения возможен пересмотр целей познания, понимая под ними *не открытие истины, а накопление запретов на возможные состояния мира*. Это не просто игра слов с заменой одного выражения другим. Это изменение точки зрения на предмет, которое имеет далеко идущие последствия.

Точку зрения на законы природы как на запреты отстаивал К.Поппер.

«... количество позитивной информации о мире, сообщаемой научным высказыванием, тем больше, чем

более вероятно его столкновение, обусловленное логическими основаниями, с возможными сингулярными высказываниями. (Не зря же мы называем законы природы "законами": чем больше они запрещают, тем больше они говорят.)» [28, с. 38].

«*... закон сохранения энергии можно выразить в форме "Не существует вечного двигателя", а гипотезу об элементарном заряде – в форме "Не существует иного электрического заряда, чем заряд, кратный элементарному электрическому заряду". Мы видим, что в такой формулировке законы природы можно сравнить с "проскрипциями", или "запретами". Они не утверждают, что нечто существует или происходит, а отрицают существование чего-то. Они настаивают на несуществовании определенных вещей или положений дел, запрещая или устраняя их.* [28, с. 63].

Об этом же, но другими словами, говорит А.Д.Закревский [14, с. 4].

«*Исходя из общих соображений, естественно определить данные как некоторые сведения об отдельных объектах, а знания – о мире в целом. ...данные представляют информацию о существовании объектов с определенными комбинациями свойств (значений признаков), а знания – информацию о существующих в мире закономерных связях между признаками, запрещающих некоторые другие сочетания свойств у объектов.*

...различие между данными и знаниями можно сформулировать так: данные – это информация о существовании объектов с некоторыми наборами свойств, а знания – информация о несуществовании объектов с некоторыми наборами свойств».

Для выражения запретов мы традиционно прибегаем к понятию истинности. Но дело в том, что запреты могут быть выражены и иными способами – количественные запреты, структурные запреты и пр. Одним из важных следствий изменения точки зрения, о котором мы говорили выше, заключается в том, что в этом случае *основной задачей логики должно стать изучение форм выражения запретов в языке и способов рассуждений, которые позволяют регулярным образом переходить от одних запретов к другим*. Т.е. акцент переносится с понятия истинности на понятие запрета. Самоограничение логики изучением лишь истинностных запретов никак не обосновано.

Рассмотрим классическую логику высказываний. Мы говорим, что формула $A \rightarrow B$ общезначима, если в каждом возможном мире, в котором истинна формула A, также будет истинна формула B. Т.е. области истинности $|A|$ и $|B|$ формул A и B в теоретико-множественном смысле находятся в отношении включения $|A| \subseteq |B|$. Формулы A и B совместны, если существует такой возможный мир, в котором они одновременно истинны, т.е. теоретико-множественное пересечение их областей истинности непусто $|A| \cap |B| \neq \varnothing$. Все основные семантические понятия классической логики можно выразить в терминах теоретико-множественных операций с областями истинности формул, и запреты также выражаются в этих терминах. Для общезначимой формулы $A \rightarrow B$ выражаемый ею запрет может быть представлен в виде $|A| \cap |\neg B| = \varnothing$, т.е. не существует такого возможного мира, который одновременно принадлежит областям истинности формул A и $\neg B$.

Одним из важнейших видов запретов в современной науке являются количественные запреты. С их помощью выражаются законы многих наук, находя разнообразное применение в человеческой практике. Мы привыкли, что числа и операции с ними изучают в арифметике, которая по своей природе не является логикой. Никто не собирается этого опровергать. Речь идет о другом.

Пусть у нас имеется стандартная модель классического исчисления высказываний M=<W, |.|>, где W – это множество возможных миров, а |.| – функция приписывания пропозициональным переменным тех миров, в которых они истинны. Эта функция естественным образом может быть распространена на все формулы языка. И пусть у нас есть три формулы – A, B и C, области истинности которых |A|, |B| и |C| находятся в теоретико-множественных отношениях, изображенных на следующем рисунке.

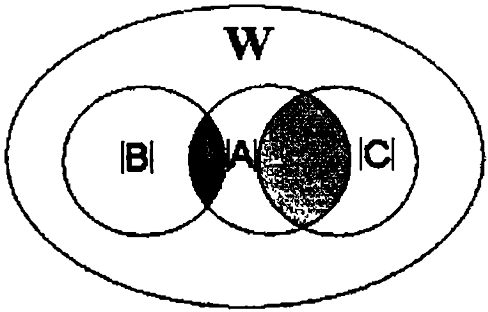

Рис. 7

В терминах теории множеств эти отношения можно записать как $|A| \cap |B| \neq \varnothing$, $|A| \cap |C| \neq \varnothing$ и $|B| \cap |C| = \varnothing$. На языке логики высказываний это будет означать, что формула A совместна с формулой B и совместна с формулой C, но B и C несовместны. Допустим теперь, что площади на приведенном ниже рисунке пропорциональны количеству элементов, содержащихся в этих множествах. Мы видим, что количественная оценка множества $|A|\cap|C|$ в несколько раз превосходит количественную оценку множества $|A|\cap|B|$. Логический смысл данного факта, весьма ценного с познавательной точки зрения, состоит в том, что формула A гораздо сильнее связана с формулой C, чем с формулой B. Для выражения этого факта нам недостаточно одних лишь теоретико-множественных отношений между объемами множеств, а необходимо учитывать и мощности этих множеств, что является их неотъемлемой характеристикой. В случае конечных множеств – это просто количество составляющих их элементов. *Оставаясь в рамках теоретико-множественного подхода в математике, мы можем рассматривать различные виды запретов, выражаемые не только в виде теоретико-множественных операций с объемами, но и операций с мощностями областей истинности формул*.

Кажется вполне естественным, что чем больше информации, содержащейся в модели, мы учтем, тем более тонкие отношения между формулами языка мы сможем проанализировать. В таком случае, почему логика не учитывает такой фундаментальной характеристики множеств как их мощность, которая имплицитно содержится в определении каждой модели?

Могут возразить, почему бы не изучать эти запреты просто в рамках теорий, сформулированных в языке доброй старой первопорядковой логики предикатов? Ответ довольно прост. Речь идет о природе логики и фундаментальных отношениях, которые в ней изучаются. Мощности множеств присутствуют практически в каждой модели независимо от того, является ли она моделью логики или некоторой прикладной теории. Другое дело, что мы должны изучать логическую компоненту количественных отношений, а не те отношения между числами, которые изучаются в арифметике.

X. КВАНТИТАТИВНАЯ ЛОГИКА QL

Предложенная выше альтернативная логика **ACL** хоть и представляет теоретический интерес, но все еще далека от конкретных практических приложений. Альтернативное отношение следования лишь в том случае получит право на существование, если будет продемонстрировано, что с его помощью можно построить нетривиальные и практически полезные теории, которые найдут применение в современной науке. Первым нашим шагом на этом пути станет построение квантитативной логики **QL**, отношение следования которой будет определяться не через сохранение истинностных значений от посылок к заключению, и не через вычислимость истинностного значения заключения по истинностным значениям посылок, как в логике **ACL**, а через *вычислимость количественной оценки заключения на основании количественных оценок посылок*. Построению этой логики и ее анализу будет посвящена оставшаяся часть книги.

Фиксируем язык:

1. **Var** – множество пропозициональных переменных;
2. $\&, \vee, \neg$ – логические связки.

Определение множества пропозициональных формул **PF** – обычное.

1. $\mathbf{Var} \subseteq \mathbf{PF}$;
2. Если $A, B \in \mathbf{PF}$, то $\neg A, (A \& B), (A \vee B) \in \mathbf{PF}$;

3. Ничто другое пропозициональной формулой не является.

Моделью нашего языка будем называть тройку $M=\langle W, |.|, n\rangle$, где

1. W – конечное множество возможных миров некоторой мощности N (случай произвольной мощности множества W мы рассмотрим позже);
2. $|.|$ – функция интерпретации пропозициональных переменных $|.|:Var\rightarrow 2^W$, сопоставляющая каждой переменной p некоторое подмножество $|p|\subseteq W$ (область истинности);
3. n – функция $n:2^W\rightarrow[0..N]$, сопоставляющая каждому подмножеству множества W число его элементов.

Обычным образом распространяем функцию $|.|$ на множество всех формул:

1. $|\neg A| = W-|A|$;
2. $|A\&B| = |A|\cap|B|$;
3. $|A\vee B| = |A|\cup|B|$.

Как обычно, мы говорим, что формула A *значима в модели* M, если имеет место $|A|=W$. Формула A *логически общезначима*, если она значима в каждой модели.

По определению вводим связки:

Def.7 $A\supset B =_{def} \neg A\vee B$
Def.8 $A\equiv B =_{def} (A\supset B)\&(B\supset A)$

Обратимся теперь к свойствам функции n.

Очевидно, что количественные оценки некоторого множества n(U) и его дополнения n(-U) связаны между собой следующим образом:

N.1 $n(-U) = n(W)-n(U) = n(W)-n(U)$

Количественную оценку объединения двух множеств $n(U \cup V)$ на основании одних лишь оценок n(U) и n(V) мы можем вычислить лишь в том случае, если пересечение множеств U и V пусто, т.е. $U \cap V=\varnothing$.

N.2 $n(U \cup V) = n(U)+n(V)$, если $U \cap V=\varnothing$

Из свойств N.1 и N.2 можно вывести, что в случае непустого пересечения U и V оценка $n(U \cup V)$ зависит также от оценки $n(U \cap V)$ и вычисляется следующим образом:

N.3 $n(U \cup V) = n(U)+n(V)- n(U \cap V)$

Из приведенных соотношений путем несложных рассуждений можно получить и другие:

N.4 $n(U \cap V) = n(U)+n(V)-n(U \cup V)$
N.5 $n(U \cup -U) = n(W)=N$
N.6 $n(U \cap -U) = 0$
N.7 $n(U) = n(U \cap -V)+n(U \cap V)$

Для любой конечной алгебры множеств, в том числе и для алгебры {|A|: A -формула классического исчисления высказываний}, свойств N.1 и N.2 оказывается достаточно, так как все остальные операции этой алгебры выразимы через дополнение и объединение.

Теперь мы хотим определить на семантическом уровне отношение *квантитативного следования* $\Gamma||{=}A$.

Def.9 Из множества формул $\Gamma=\{B_1,\ldots,B_k\}$ *квантитативно следует* формула A, если и только если существует функция $f{:}N^k\to N$, которая во всякой модели M позволяет на основании оценок $n(|B_1|),\ldots,n(|B_k|)$ вычислить оценку $n(|A|)$, т.е. $n(|A|)=f(n(|B_1|),\ldots,n(|B_k|))$.

$$\{B_1,\ldots,B_k\}||{=}A \Leftrightarrow \exists f\forall M(M=\langle W, |.|, n\rangle \Rightarrow n(|A|)=f(n(|B_1|),\ldots,n(|B_k|)))$$

Def.10 *Квантитативной выводимостью* будем называть выражение вида $\Gamma||{-}A$, где A – формула, а $\Gamma=\{B_1,\ldots,B_k\}$ конечное множество формул логики высказываний.

Аксиоматизацию отношения квантитативного следования представим в виде набора квантитативных выводимостей и правил перехода от одних квантитативных выводимостей к другим. Формулы, доказуемые в классической логике высказываний, будем обозначать посредством $|{-}A$.

Q.1 $||{-}A\vee\neg A$
Q.2 $\{A, B, A\&B\}||{-}A\vee B$
Q.3 $\{A\}||{-}\neg A$

QR.1 $|{-}A\equiv B \Rightarrow \{A\}||{-}B$
QR.2 $\Gamma||{-}A$ и $\{A\}\cup\Delta||{-}B \Rightarrow \Gamma\cup\Delta||{-}B$

Как и в случае логики **ACL**, ссылка на классическую логику в правиле QR.1 позволила нам всего лишь дать компактную аксиоматизацию, но не является обязательной. С равным успехом мы могли бы оставить одно лишь правило QR.2, а QR.1 заменить на несколько аксиом, соответствующих аксиомам булевой алгебры, по правилу: если A=B – аксиома булевой алгебры, то к набору наших аксиом-выводимостей мы добавляем две новые – {A}||-B и {B}||-A.

Так как по нашему определению выводимости слева от знака ||- всегда стоит множество, мы будем опускать фигурные скобки и символ операции объединения множеств формул. Запись двух множеств формул через запятую Г, Δ служит сокращением для Г∪Δ, запись двух формул A, B – сокращением для {A, B} и т.д.

Дадим определение доказательства в квантитативном исчислении.

Def.11 *Доказательством в квантитативной логике* **QL** называется непустая конечная последовательность, каждый из элементов которой является либо доказуемой формулой классического исчисления высказываний вида A≡B, либо квантитативной выводимостью Q.1-Q.3, либо квантитативной выводимостью, полученной из предыдущих элементов последовательности по правилам QR.1-QR.2. Доказанной считается квантитативная выводимость, являющаяся конечным элементом последовательности.

Квантитативную логику **QL** можно представить и в виде системы натурального вывода.

Натуральная QN формулировка квантитативной логики.

Правила вывода:

QN.1 $\Rightarrow A \vee \neg A$
QN.2 $A \Rightarrow \neg A$
QN.3 $A, B, A\&B \Rightarrow A \vee B$
QN.4 $|\text{-}A \equiv B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Def.12 *Квантитативным выводом* из множества гипотез Г формулы А в логике **QN** называется непустая конечная последовательность формул $\langle A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle$, каждая из которых либо принадлежит множеству Г ($A_i \in \Gamma$), либо получена из предыдущих формул последовательности по одному из правил вывода QN.1-QN.4, либо классически эквивалентна одной из предыдущих формул последовательности, и конечным элементом последовательности является формула А ($A_k = A$).

Доказательство эквивалентности двух формулировок тривиально. Легко показать, что квантитативная выводимость $\Gamma || \text{-} A$ доказуема в **QL**, е. и т. е. в **QN** существует вывод формулы А из множества гипотез Г.

Следует обратить внимание на то, что логика **QL** является непосредственным обобщением логики **ACL**. Если в квантитативной логике **QL** ограничиться рассмотрением моделей $M = \langle W, |.|, n \rangle$, где множество W одноэлементно, то мы получим в точности логику **ACL**.

Задавая семантику для логики **QL**, мы исходили из понятия модели для классической логики, чтобы иметь возможность говорить о количественных оценках областей истинности формул. Можно дать определение квантитативной модели QM для логики **QL** без упоминания областей истинности.

Квантитативной моделью нашего языка будем называть пару QM=<N, n>, где

1. N – натуральное число;
2. n – функция n:**PF**→[0..N], сопоставляющая каждой формуле A некоторое натуральное число n(A) и удовлетворяющая соотношениям:
   - $n(A\&\neg A)=0$
   - $n(\neg A) = N\text{-}n(A)$
   - $n(A\vee B) = n(A)+n(B)\text{-}n(A\&B)$
   - $|\text{-}A\equiv B \Rightarrow n(A)=n(B)$ $\quad$ $A\equiv B$ – доказуемая в классической логике формула

В этой модели мы говорим уже не о количественных оценках областей истинности формул, а просто о некоторых количественных оценках, удовлетворяющих определенным соотношениям.

Покажем непротиворечивость логики **QL**. Для этого нам надо показать, что всякая доказуемая квантитативная выводимость обладает свойством квантитативного следования.

Теорема о непротиворечивости QL. Если Г||-A, то Г||=A.

Для начала проверим аксиомы Q.1-Q.3.

Q.1 $n(|A\vee\neg A|) = n(|A|\cup|\neg A|) = n(|A|\cup-|A|) = n(W)$.

Q.2 $n(|A\vee B|) = n(|A|\cup|B|) = n(|A|)+n(|B|)-n(|A|\cap|B|) = n(|A|)+n(|B|)-n(|A\&B|)$.

Q.3 $n(|\neg A|) = n(-|A|) = n(W)-n(A)$.

Теперь проверим, что правила QR.1-QR.2 сохраняют свойство квантитативного следования.

Если $\Gamma=\{B_1,\ldots,B_k\}$, то $n(|\Gamma|)$ будет служить сокращением для $< n(|B_1|),\ldots,n(|B_k|)>$

QR.1

1. $\vdash A\equiv B$	– допущение
2. $|A|=|B|$	– из определения модели
3. $n(|B|)=n(|A|)$	– из определения n

QR.2

1. $n(|A|) = f(n(|\Gamma|))$	– допущение
2. $n(|B|) = g(n(|A|),n(|\Delta|))$	– допущение
3. $n(|B|) = g(f(n(|\Gamma|)),n(|\Delta|))$	– из 1, 2

Покажем, что построенное исчисление нетривиально, т.е. существуют недоказуемые квантитативные выводимости. Для этого достаточно привести пример квантитативной выводимости, не обладающей свойством квантитативного следования. Самый простой пример – это $\varnothing\|\!-p$. Так как множество Г пусто, то значение n(p) должно быть константным во всех моделях, что очевидным образом не имеет места.

Теорема доказана.

Следствие теоремы о непротиворечивости.

По всякому доказательству Г||-А в логике **QL** мы можем синтезировать функцию, которая вычисляет количественную оценку области истинности формулы А на основании количественных оценок областей истинности формул, входящих в Г. Эта функция является некоторой суперпозицией операций сложения и вычитания.

Докажем ряд теорем о наличии квантитативных выводимостей.

Лемма 2. Следующие квантитативные выводимости и правила перехода от одних квантитативных выводимостей к другим доказуемы в логике **QL**.

T.1 A||-A
T.2 |-A ⇒ (Г, A||-B ⇒ Г||-B)
T.3 |-A≡B ⇒ (Г||-A ⇒ Г||-B)
T.4 |-A≡B ⇒ (Г, B ||-C ⇒ Г, A||-C)
T.5 Г, A||-B ⇒ Г, ¬A||-B
T.6 Г, ¬A||-B ⇒ Г, A||-B
T.7 Г||-¬A ⇒ Г||-A
T.8 Г||-A ⇒ Г||-¬A
T.9 |-¬A ⇒ (Г, A||-B ⇒ Г||-B)
T.10 |-¬(A&B) ⇒ A, B||-A∨B
T.11 A, B, A∨B||-A&B
T.12 A, A&B, A∨B||-B
T.13 A&B, ¬A&B||-B
T.14 B, ¬A&B||-A&B
T.15 |-¬(A&B) ⇒ A, A∨B||-B

T.16 $\vdash A \Rightarrow \Vdash A$

T.17 $\Gamma \Vdash A \Rightarrow \Gamma, B \Vdash A$

T.1 $A \Vdash A$

1. $\vdash A \equiv A$	– КИВ
2. $A \Vdash A$	– из 1, QR.1

T.2 $\vdash A \Rightarrow (\Gamma, A \Vdash B \Rightarrow \Gamma \Vdash B)$

+1. $\vdash A$	
+2. $\Gamma, A \Vdash B$	
3. $\vdash A \vee \neg A \equiv A$	– из 1
4. $A \vee \neg A \Vdash A$	– из 3 по QR.1
5. $\Vdash A$	– из 4, Q.1 по QR.2
6. $\Gamma \Vdash B$	– из 5, 2 по QR.2

T.3 $\vdash A \equiv B \Rightarrow (\Gamma \Vdash A \Rightarrow \Gamma \Vdash B)$

+1. $\vdash A \equiv B$	
2. $A \Vdash B$	– из 1 по QR.1
+3. $\Gamma \Vdash A$	
4. $\Gamma \Vdash B$	– из 3, 2 по QR.2

T.4 $\vdash A \equiv B \Rightarrow (\Gamma, B \Vdash C \Rightarrow \Gamma, A \Vdash C)$

+1. $\vdash A \equiv B$	
2. $A \Vdash B$	– из 1 по QR.1
+3. $\Gamma, B \Vdash C$	
4. $\Gamma, A \Vdash C$	– из 2, 3 по QR.2

T.5 $\Gamma, A \Vdash B \Rightarrow \Gamma, \neg A \Vdash B$

+1. $\Gamma, A \Vdash B$	
2. $\neg A \Vdash \neg\neg A$	– Q.3
3. $\vdash A \equiv \neg\neg A$	– КИВ
4. $\neg A \Vdash A$	– из 2, 3 по T.3
5. $\Gamma, \neg A \Vdash B$	– из 1, 4 по QR.2

T.6 $\Gamma, \neg A \Vdash B \Rightarrow \Gamma, A \Vdash B$
+1. $\Gamma, \neg A \Vdash B$
2. $A \Vdash \neg A$ – Q.3
3. $\Gamma, A \Vdash B$ – из 2, 1 по QR.2

T.7 $\Gamma \Vdash \neg A \Rightarrow \Gamma \Vdash A$
+1. $\Gamma \Vdash \neg A$
2. $\neg A \Vdash \neg\neg A$ – Q.3
3. $\Gamma \Vdash \neg\neg A$ – из 1, 2 по QR.2
4. $\vdash A \equiv \neg\neg A$ – КИВ
5. $\Gamma \Vdash A$ – из 3, 4 по T.3

T.8 $\Gamma \Vdash A \Rightarrow \Gamma \Vdash \neg A$
+1. $\Gamma \Vdash A$
2. $A \Vdash \neg A$ – Q.3
3. $\Gamma \Vdash \neg A$ – из 1, 2 по QR.2

T.9 $\vdash \neg A \Rightarrow (\Gamma, A \Vdash B \Rightarrow \Gamma \Vdash B)$
+1. $\vdash \neg A$
+2. $\Gamma, A \Vdash B$
3. $\Gamma, \neg A \Vdash B$ – из 3 по T.3
4. $\Gamma \Vdash B$ – из 1, 3 по T.2

T.10 $\vdash \neg(A\&B) \Rightarrow A, B \Vdash A \vee B$
+1. $\vdash \neg(A\&B)$
2. $A, B, A\&B \Vdash A \vee B$ – Q.2
3. $A, B \Vdash A \vee B$ – 1, 2 по T.9

T.11 $A, B, A \vee B \Vdash A\&B$
1. $\neg A, \neg B, \neg A\&\neg B \Vdash \neg A \vee \neg B$ – Q.2
2. $A, B, \neg A\&\neg B \Vdash \neg A \vee \neg B$ – 1 по T.6
3. $A, B, \neg(\neg A\&\neg B) \Vdash \neg A \vee \neg B$ – из 2 по T.5

4. $\vdash A \vee B \equiv \neg(\neg A \& \neg B)$ – КИВ
5. A, B, $A \vee B \Vdash \neg\neg A \vee \neg B$ – из 3, 4 по Т.4
6. A, B, $A \vee B \Vdash \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$ – из 5 по Т.8
7. $\vdash \neg\neg(\neg A \vee \neg B) \equiv (A \& B)$ – КИВ
8. A, B, $A \vee B \Vdash A \& B$ – из 6, 7 по Т.3

Т.12 A, A&B, $A \vee B \Vdash B$

1. $(A \vee B) \& \neg A$, $A \& B$, $(A \vee B) \& \neg A \& A \& B \Vdash$
$\Vdash ((A \vee B) \& \neg A) \vee (A \& B)$ – Q.2
2. $\vdash ((A \vee B) \& \neg A) \vee (A \& B) \equiv B$ – КИВ
3. $(A \vee B) \& \neg A$, $A \& B$, $(A \vee B) \& \neg A \& A \& B \Vdash B$ – из 1, 2 по Т.3
4. $\vdash \neg\neg((A \vee B) \& \neg A \& A \& B)$ – КИВ
5. $(A \vee B) \& \neg A$, $A \& B \Vdash B$ – из 3, 4 по Т.9
6. $\neg A$, $A \vee B$, $A \vee B \vee \neg A \Vdash (A \vee B) \& \neg A$ – Т.11
7. $\neg A$, $A \vee B$, $A \vee B \vee \neg A$, $A \& B \Vdash B$ – из 6, 5 по QR.2
8. $\vdash A \vee B \vee \neg A$ – КИВ
9. $\neg A$, $A \vee B$, $A \& B \Vdash B$ – из 7, 8 по Т.2
10. A, $A \vee B$, $A \& B \Vdash B$ – из 9 по Т.6

Т.13 A&B, $\neg A \& B \Vdash B$

1. $\vdash \neg\neg(A \& B \& \neg A \& B)$ – КИВ
2. $A \& B$, $\neg A \& B$, $A \& B \& \neg A \& B \Vdash (A \& B) \vee (\neg A \& B)$ – Q.2
3. $A \& B$, $\neg A \& B \Vdash (A \& B) \vee (\neg A \& B)$ – из 1, 2 по Т.9
4. $\vdash (A \& B) \vee (\neg A \& B) \equiv B$ – КИВ
5. $A \& B$, $\neg A \& B \Vdash B$ – из 3, 4 по Т.3

T.14 B, $\neg A \& B \Vdash A \& B$

1. B, $\neg(\neg A \& B)$, $B \vee \neg(\neg A \& B) \Vdash B \& \neg(\neg A \& B)$ – T.11
2. $\vdash B \vee \neg(\neg A \& B)$ – КИВ
3. B, $\neg(\neg A \& B) \Vdash B \& \neg(\neg A \& B)$ – из 1, 2 по T.2
4. B, $\neg A \& B \Vdash B \& \neg(\neg A \& B)$ – из 3 по T.6
5. $\vdash B \& \neg(\neg A \& B) \equiv (B \& A) \vee (B \& \neg B)$ – КИВ
6. B, $\neg A \& B \Vdash (B \& A) \vee (B \& \neg B)$ – из 4, 5 по T.2
7. $\vdash (B \& A) \vee (B \& \neg B) \equiv (B \& A)$ – КИВ
8. B, $\neg A \& B \Vdash B \& A$ – из 6, 7 по T.2

T.15 $\vdash \neg(A \& B) \Rightarrow A, A \vee B \Vdash B$

+1. $\vdash \neg(A \& B)$
2. A, $A \& B$, $A \vee B \Vdash B$ – T.12
3. A, $A \vee B \Vdash B$ – из 1, 2 по T.9

T.16 $\vdash A \Rightarrow \Vdash A$

+1. $\vdash A$
2. $A \Vdash A$ – T.1
3. $\Vdash A$ – из 1, 2 по T.2

T.17 $\Gamma \Vdash A \Rightarrow \Gamma, B \Vdash A$

+1. $\Gamma \Vdash A$
2. $\vdash \neg(A \& B \& \neg B)$ – КИВ
3. A, $B \& \neg B \Vdash A \vee (B \& \neg B)$ – из 2 по T.10
4. $\vdash A \vee (B \& \neg B) \equiv A$ – КИВ
5. A, $B \& \neg B \Vdash A$ – из 3, 4 по T.3
6. $\vdash \neg(B \& \neg B)$ – КИВ

7. $B, \neg B \Vdash B \vee \neg B$	– из 6 по Т.10
8. $B \Vdash B \vee \neg B$	– из 7 по Т.6
9. $B \Vdash \neg\neg(B \vee \neg B)$	– из 8 по Т.8
10. $\vdash \neg\neg(B \vee \neg B) \equiv (B \& \neg B)$	– КИВ
11. $B \Vdash B \& \neg B$	– из 9, 10 по Т.3
12. $A, B \Vdash A$	– из 3, 11 по QR.2
13. $\Gamma, B \Vdash A$	– из 1, 12 по QR.2

Лемма доказана.

Теорема о полноте формулируется следующим образом: если $\Gamma \| = A$, то $\Gamma \Vdash A$. Покажем, что она не имеет места. В качестве контрпримера рассмотрим следующую выводимость, являющуюся модификацией контрпримера из работы Н.Алешиной [47].

Для простоты изложения примем следующие сокращения: $A = p \& \neg q \& \neg r$, $B = \neg p \& q \& \neg r$, $C = \neg p \& \neg q \& r$.

Очевидно, что $\vdash \neg\neg(A \& B)$, $\vdash \neg\neg(A \& C)$ и $\vdash \neg\neg(B \& C)$. В этом случае $\{A \vee B, A \vee C, B \vee C\} \| = A$, так как в любой модели $M = \langle W, |.|, n \rangle$ будет иметь место $n(A) = (n(A \vee B) + n(A \vee C) - n(B \vee C))/2$. Но в силу следствия к теореме о непротиворечивости мы получили, что если имеет место выводимость $\{A \vee B, A \vee C, B \vee C\} \Vdash A$, то функция, вычисляющая значение $n(A)$ по значениям $n(A \vee B)$, $n(A \vee C)$ и $n(B \vee C)$, представима в виде линейной комбинации операций сложения и вычитания. Для вычисления же оценки $n(A)$ существенным образом требуется операция деления, которая невыразима через сложение и вычитание.

Добавление нового правила вывода

$$|\!-\neg(A\&B),\ |\!-\neg(A\&C),\ |\!-\neg(B\&C) \Rightarrow \{A\vee B,\ A\vee C,\ B\vee C\}\,\|\!-A$$

проблемы не решит. Легко показать, что существуют другие контрпримеры, остающиеся недоказуемыми и в этом случае.

$$|\!-\neg(A\&B),\ |\!-\neg(A\&C),\ |\!-\neg(A\&D),\ |\!-\neg(B\&C),\ |\!-\neg(B\&D),\ |\!-\neg(C\&D) \Rightarrow$$
$$\{A\vee B,\ A\vee C,\ A\vee D,\ B\vee C,\ B\vee D,\ C\vee D\}\,\|\!=A$$

Вопрос о конечной аксиоматизации квантитативной логики остается открытым. В то же время отношение следования $\Gamma\|\!=A$ является рекурсивным. Доказательство этого имеет прямое отношение к решению так называемой проблемы PSAT (Probabilistic SATisfiability) [55]. Первый вариант ее решения предложил еще Дж.Буль [51]. Суть его заключается в следующем.

Пусть $\Gamma=\{B_1,\ldots,B_k\}$, и нас интересует ответ на вопрос, имеет ли место следование $\Gamma\|\!=A$ для некоторой формулы A. В силу выводимостей Т.3 и Т.4 мы можем считать, что все формулы находятся в СДНФ, т.е.

$$B_1=B_{11}\vee\ldots\vee B_{1n}$$
$$\ldots$$
$$B_k=B_{k1}\vee\ldots\vee B_{kr}$$
$$A=A_1\vee\ldots\vee A_s$$

где B_{ij}, A_r – элементарные конъюнкции переменных и их отрицаний.

Нас интересует ответ на вопрос, существует ли функция f, для которой в произвольной модели выполняется равенство $f(n(|B_1|),\dots, n(|B_k|))=n(|A|)$.

В силу свойства N.2 для количественных оценок сопоставим каждой элементарной конъюнкции в СДНФ свою числовую переменную и запишем следующую систему линейных уравнений и неравенств.

$n(|B_1|)= x_{11}+\dots+x_{1n}$

$\dots$

$n(|B_k|)= x_{k1}+\dots+x_{kr}$

$n(|A|)= x_{a1}+\dots+x_{as}$

$x_1+\dots+x_m=N$ – где $x_1,\dots,x_m$ соответствуют набору всех возможных элементарных конъюнкций СДНФ.

$0\le x_{ij}\le N$

Теперь вопрос о следовании $\{B_1,\dots,B_k\}||=A$ сводится к решению системы линейных уравнений, что решается стандартными методами линейной алгебры.

Таким образом, вопрос об аксиоматизации отношения квантитативного следования перемещается в плоскость поиска его конечной аксиоматизации. Аксиоматика, представленная нами, таковой не является. Является ли это непреодолимым препятствием для того, чтобы не заниматься вопросами квантитативного следования? Конечно же нет. Выше мы уже показали, что квантитативные отношения между предложениями языка являются гораздо более тонкими, чем отношения, выразимые в булевой алгебре, и отказ от их изучения не может быть оправдан одним лишь отсутствием конечной аксиоматизации. Значение построения логики QL заключается в том, что на ее примере мы показали возможность определения отношения квантитативного следования без использования понятия истинностных значений формул.

XI. ОГРАНИЧЕННАЯ КВАНТИТАТИВНАЯ ЛОГИКА LQL

В предыдущем параграфе, определяя семантику логики QL, мы предполагали, что фиксирован некоторый универсум рассуждения мощности N и формулам языка сопоставляются принадлежащие интервалу от 0 до N количественные оценки их областей истинности. В некоторых интересных случаях универсум рассуждения может не иметь верхней оценки N, так как она может быть просто неизвестна. Если перевести это на язык алгебры множеств, то операция дополнения может быть неопределена и вместо нее используется операция относительного дополнения. Нас будут интересовать алгебры множеств, которые замкнуты относительно конечных объединений $U \cup V$, конечных пересечений $U \cap V$ и относительных дополнений $U \setminus V$. Такие структуры называются булевыми кольцами. Простым примером является семейство всех конечных множеств натуральных чисел. Так как дополнение любого конечного множества относительно множества всех натуральных чисел бесконечно, то оно данному семейству не принадлежит. В то же время пересечение, объединение и относительное дополнение двух конечных множеств всегда конечно. Эта структура отличается от булевой алгебры лишь тем, что не имеет единицы. Стоит добавить единицу, универсальное множество, и мы сразу получаем булеву алгебру. Интерес к этой логике вызван ее практическими приложениями к анализу ответов на запросы поисковых систем Интернет.

Фиксируем язык:

1. Var – множество пропозициональных переменных;
2. $\&$, $\vee$, $\neg$ – логические связки.

QF – квантитативные формулы:

1. $Var \subseteq QF$;
2. Если A, $B \in QF$, то $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A\&\neg B) \in QF$;
3. Ничто другое квантитативной формулой не является.

Def.13 Nf – множество всех функций – количественных оценок $n \in \mathcal{N}^{QF}$ ($\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел), обладающих следующими свойствами:

1. $n(A\&\neg A)=0$
2. $n(A\&\neg B) = n(A)-n(A\&B)$
3. $n(A \vee B) = n(A)+n(B)-n(A\&B)$
4. $\vdash A\equiv B \Rightarrow n(A)=n(B)$ $\qquad$ $A\equiv B$ – доказуемая в классической логике формула.

Теперь мы хотим определить на семантическом уровне отношение *квантитативного следования* $\Gamma \Vdash A$.

Def.14 Из множества QF-формул $\Gamma=\{B_1,\dots,B_k\}$ квантитативно следует QF-формула A, если и только если существует функция $f{:}\mathcal{N}^k \to \mathcal{N}$, которая позволяет для любой количественной оценки $n \in Nf$ на основании $n(B_1),\dots,n(B_k)$ вычислить оценку $n(A)$, т.е. $n(A)=f(n(B_1),\dots,n(B_k))$.

$$\{B_1,\ldots,B_k\}||\!=A \Leftrightarrow \exists f \forall n(n \in \mathcal{N}^{QF} \Rightarrow n(|A|)=f(n(|B_1|),\ldots,n(|B_k|)))$$

Def.15 Квантитативной выводимостью будем называть выражение вида $\Gamma||\!-A$, где A – QF-формула, а $\Gamma=\{B_1,\ldots,B_k\}$ конечное множество QF-формул логики.

Аксиоматизацию отношения квантитативного следования представим в виде набора квантитативных выводимостей и правил перехода от одних выводимостей к другим. Доказуемые формулы классической логики будем обозначать посредством $|\!-A$.

LQ.1 $||\!-A\&\neg A$
LQ.2 $\{A, B, A\&B\}||\!-A\vee B$
LQ.3 $\{A, A\&B\}||\!-A\&\neg B$

LQR.1 $|\!-A\equiv B \Rightarrow \{A\}||\!-B$ $\qquad$ A, B – QF-формулы
LQR.2 $\Gamma||\!-A \Rightarrow (\{A\}\cup\Delta||\!-B \Rightarrow \Gamma\cup\Delta||\!-B)$

Так как по нашему определению выводимости слева от знака $||\!-$ всегда стоит множество, мы будем опускать фигурные скобки и символ операции объединения множеств формул. Запись двух множеств формул через запятую Γ, Δ служит сокращением для $\Gamma\cup\Delta$, запись двух формул A, B – сокращением для {A, B} и т.д.

Дадим определение доказательства в квантитативном исчислении.

Def.16 *Доказательством* в квантитативном исчислении **LQL** называется непустая конечная последовательность, каждый из элементов которой является либо доказуемой формулой исчисления высказываний вида A≡B, либо квантитативной выводимостью LQ.1-LQ.3, либо квантитативной выводимостью, полученной из предыдущих элементов последовательности по правилам LQR.1-LQR.2. Доказанной считается квантитативная выводимость, являющаяся конечным элементом последовательности.

Покажем непротиворечивость построенного исчисления. Для этого нам надо показать, что всякая доказуемая квантитативная выводимость обладает свойством квантитативного следования.

Теорема о непротиворечивости LQL: если $\Gamma\|\text{-}A$, то $\Gamma\|{=}A$.

Для начала проверим аксиомы LQ.1-LQ.3.

LQ.1 $n(A\&\neg A) = 0$.

LQ.2 $n(A\vee B) = n(A+n(B)\text{-}n(A\&B)$.

LQ.3 $n(A\&\neg B) = n(A)\text{-}n(A\&B)$.

Теперь проверим, что правила LQR.1-LQR.2 сохраняют свойство квантитативного следования.

Если $\Gamma=\{B_1,\ldots,B_k\}$, то $n(\Gamma)$ будет служить сокращением для $< n(B_1),\ldots,n(B_k)>$

LQR.1
+1. $|\text{-}A\equiv B$

2. n(B)=n(A) - Def.1.4

LQR.2
+1. n(A) = f(n(Г))
+2. n(B) = g(n(A),n(Δ))
3. n(B) = g(f(n(Г)),n(Δ)) - из 1, 2

Покажем, что построенное исчисление нетривиально, т.е. существуют недоказуемые квантитативные выводимости. Для этого достаточно привести пример квантитативной выводимости, не обладающей свойством квантитативного следования. Самый простой пример – это ∅||-p. Так как множество Г пусто, то значение n(p) должно быть константным во всех моделях, что очевидным образом не имеет места.

Теорема доказана.

Следствие теоремы о непротиворечивости.

По всякому доказательству Г||-A в логике LQL мы можем синтезировать функцию, которая вычисляет количественную оценку формулы A на основании количественных оценок формул, входящих в Г.

Лемма 3. Следующие выводимости и правила перехода от одних выводимостей к другим доказуемы в логике **LQL**.

T.1 $\vdash A \equiv B \Rightarrow (\Gamma \Vdash A \Rightarrow \Gamma \Vdash B)$
T.2 $\vdash A \equiv B \Rightarrow (\Gamma, B \Vdash C \Rightarrow \Gamma, A \Vdash C)$
T.3 $\vdash \neg A \Rightarrow (\Gamma, A \Vdash B \Rightarrow \Gamma \Vdash B)$
T.4 $\vdash \neg(A \& B) \Rightarrow A, B \Vdash A \vee B$
T.5 $A \& B, \neg A \& B \Vdash B$
T.6 $B, \neg A \& B \Vdash A \& B$
T.7 $A, B, A \vee B \Vdash A \& B$
T.8 $A, A \& B, A \vee B \Vdash B$
T.9 $A \& C, B \& C, A \& B \& C \Vdash (A \vee B) \& C$
T.10 $\Gamma \Vdash A \Rightarrow \Gamma, B \Vdash A$

T.1 $\vdash A \equiv B \Rightarrow (\Gamma \Vdash A \Rightarrow \Gamma \Vdash B)$
+1. $\vdash A \equiv B$
+2. $\Gamma \Vdash A$
3. $A \Vdash B$ – из 1 по LQR.1
4. $\Gamma \Vdash B$ – из 2, 3 по LQR.2

T.2 $\vdash A \equiv B \Rightarrow (\Gamma, B \Vdash C \Rightarrow \Gamma, A \Vdash C)$
+1. $\vdash A \equiv B$
+2. $\Gamma, B \Vdash C$
3. $A \Vdash B$ – из 1 по LQR.1
4. $\Gamma, A \Vdash C$ – из 2, 3 по LQR.2

T.3 $\vdash \neg A \Rightarrow (\Gamma, A \Vdash B \Rightarrow \Gamma \Vdash B)$
+1. $\vdash \neg A$
+2. $\Gamma, A \Vdash B$
3. $\vdash A \& \neg A \equiv A$ – из 1, КИВ
4. $\Gamma, A \& \neg A \Vdash B$ – из 2, 3 по Т.2
5. $\Gamma \Vdash B$ – из 4, LQ.1 по LQR.2

T.4 $\vdash \neg(A \& B) \Rightarrow A, B \Vdash A \vee B$
+1. $\vdash \neg(A \& B)$

2. A, B, A&B||-A∨B – LQ.2
3. A, B||-A∨B – из 1, 2 по T.3

T.5 A&B, ¬A&B||-B
1. A&B, ¬A&B, (A&B)&(¬A&B)||-
||- (A&B)∨(¬A&B) – LQ.2
2. |-¬((A&B)&(¬A&B))
3. A&B, ¬A&B||- (A&B)∨(¬A&B) – из 1, 2 по T.3
4. |-B≡(A&B)∨(¬A&B) – КИВ
5. A&B, ¬A&B||- B – из 3, 4 по T.1

T.6 B, ¬A&B||-A&B
1. B, B&(¬A&B)||-B&¬(¬A&B) – LQ.3
2. |- B&(¬A&B)≡¬A&B – КИВ
3. B, ¬A&B||-B&¬(¬A&B) – из 1 2 по T.2
4. |- B&¬(¬A&B)≡A&B – КИВ
5. B, ¬A&B||-A&B – из 3, 4 по T.1

T.7 A, B, A∨B||-A&B
1. A, A&¬B||-A&B – T.6
2. |-(A∨B)&¬B≡A&¬B – КИВ
3. A, (A∨B)&¬B||-A&B – из 1, 2 по T.2
4. A∨B, (A∨B)&B||-(A∨B)&¬B – LQ.3
5. |-(A∨B)&B≡B – КИВ
6. A∨B, B||-(A∨B)&¬B – из 4, 5 по T.2
7. A, B, A∨B||-A&B – из 6, 3 по LQR.2

T.8 A, A&B, A∨B||-B
1. A&B, ¬A&B||-B – T.5
2. |-¬A&B≡(A∨B)&¬A – КИВ
3. A&B, (A∨B)&¬A||-B – из 1, 2 по T.2

4. $A \vee B, (A \vee B) \& A \Vdash (A \vee B) \& \neg A$ – LQ.3
5. $\vdash (A \vee B) \& A \equiv A$ – КИВ
6. $A \vee B, A \Vdash (A \vee B) \& \neg A$ – из 4, 5 по Т.2
7. $A, A \& B, A \vee B \Vdash B$ – из 3, 6 по LQR.2

Т.9 $A \& C, B \& C, A \& B \& C \Vdash (A \vee B) \& C$
1. $A \& C, B \& C, A \& C \& B \& C \Vdash (A \& C) \vee (B \& C)$ – LQ.2
2. $\vdash A \& C \& B \& C \equiv A \& B \& C$ – КИВ
3. $\vdash (A \& C) \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& C$ – КИВ
4. $A \& C, B \& C, A \& C \& B \& C \Vdash (A \vee B) \& C$ – из 1, 3 по Т.1
5. $A \& C, B \& C, A \& B \& C \Vdash (A \vee B) \& C$ – из 2, 4 по Т.2

Т.10 $\Gamma \Vdash A \Rightarrow \Gamma, B \Vdash A$
+1. $\Gamma \Vdash A$
2. $\vdash \neg(A \& B \& \neg B)$ – КИВ
3. $A, B \& \neg B \Vdash A \vee (B \& \neg B)$ – из 2 по Т.4
4. $B, B \& B \Vdash B \& \neg B$ – LQ.3
5. $\vdash B \& B \equiv B$ – КИВ
6. $B \Vdash B \& \neg B$ – из 4, 5 по Т.2
7. $A, B \Vdash A \vee (B \& \neg B)$ – из 3, 6 по LQR.2
8. $\vdash A \vee (B \& \neg B) \equiv A$ – КИВ
9. $A, B \Vdash A$ – из 7, 8 по Т.1
10. $\Gamma, B \Vdash A$ – из 1, 9 по LQR.2

Лемма доказана.

Как и в случае логики **QL**, предложенная аксиоматика логики **LQL** не является полной. Контрпример, построенный для QL, одновременно является контрпримером и для LQL.

Натуральная формулировка LQN ограниченной квантитативной логики.

Правила вывода:

LQN.1 $\Rightarrow A\&\neg A$
LQN.2 $A, A\&B \Rightarrow A\&\neg B$
LQN.3 $A, B, A\&B \Rightarrow A\vee B$
LQN.4 $|\text{-}A\equiv B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Def.17 *Выводом* $\Gamma||\text{-}A$ из множества гипотез Γ формулы A в квантитативной логике LQN называется непустая конечная последовательность формул $<A_1, A_2, \ldots, A_k>$, каждая из которых либо принадлежит множеству Γ ($A_i\in\Gamma$), либо получена из предыдущих формул последовательности по одному из правил вывода LQN.1-LQN.4, либо классически эквивалентна одной из предыдущих формул последовательности, и конечным элементом последовательности является формула A ($A_k=A$).

Доказательство эквивалентности двух формулировок тривиально. Легко показать, что квантитативная выводимость $\Gamma||\text{-}A$ доказуема в LQL, е. и т. е. в LQN существует вывод формулы A из множества гипотез Γ.

XII. ОБ ОТНОШЕНИИ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Если открыть любой стандартный учебник по теории вероятностей, то с первых страниц читателю предлагается много иллюстрирующих примеров из области явлений, имеющих, по мнению авторов учебников, вероятностную природу. Это – бросание монеты, бросание костей, вынимание белых или черных шаров из урны, стрельба по мишеням и пр. Читателя изначально ориентируют на вероятностное понимание излагаемой математической теории. Его знакомят с различными интерпретациями теории. При *классической* интерпретации в основе определения вероятности события лежит выделение всех возможных его исходов и тех исходов, которые считаются благоприятными. В качестве оценки вероятности принимается отношение числа благоприятных исходов к числу всех возможных. Например, при бросании кости число, делящееся на три, может выпасть в двух случаях из шести возможных. Поэтому вероятность того, что выпадет именно такое число, вычисляется как 2/6. При бросании монеты вероятность того, что выпадет решка оценивается как ½. При *частотной* интерпретации вероятность понимается как относительная частота появления благоприятных исходов в бесконечном ряду испытаний. В этом случае, чтобы выпадению решки сопоставить вероятностную оценку, необходимо провести потенциально бесконечный ряд испытаний с подбрасыванием монеты. В основе *субъективной* интерпретации лежит степень веры человека в то, что исход события будет тем, а не иным. Оценивать степени веры можно с помощью ставок при заключении пари. Если вы готовы сделать ставку 4 к 6 в пользу того, что при бросании монеты выпадет решка, то ваша степень веры в это оценивается как 4/(4+6)=4/10. При *логической* интерпретации вероятность сопоставляется не событиям, а предложениям языка и понимается как степень истинности предложения. Вычислить его можно, например, построив таблицу истинности и посчитав отношение числа строк, в котором данное предложение истинно, к общему числу строк в таблице. Есть и другие менее употребительные интерпретации вероятности, на которых мы останавливаться не будем.

Коль скоро понятие вероятности может быть интерпретировано столь разными способами, должны существовать некоторые общие свойства этого понятия, которые одновременно присущи каждой из интерпретаций. Первое аксиоматическое определение понятия вероятности дал в 1933 году А.Н.Колмогоров [22]. Можно сказать, что оно общепринято в теории вероятностей, хотя после Колмогорова предпринимались и другие успешные попытки дать альтернативную аксиоматику [62, 63]. Сравнительный анализ различных аксиоматик можно найти в [58, 59].

Напомним определение Колмогорова.

Дано множество Ω, элементы которого называются элементарными событиями, и семейство его подмножеств F. Элементы F называются случайными событиями. Также дана функция P, сопоставляющая каждому элементу A семейства F действительное число P(A), называемое вероятностью события A. Тройка $<\Omega, F, P>$ называется полем вероятностей, если выполняются следующие аксиомы.

K.1 F является алгеброй множеств:

B.1 $\Omega \in F$

B.2 Если $A \in F$ и $B \in F$, то $A \cup B \in F$, $A \cap B \in F$ и $A \setminus B \in F$

K.2 $0 \leq P(A) \leq 1$

K.3 $P(\Omega)=1$

K.4 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$, если $A \cap B=\varnothing$.

Необходимо сделать следующее замечание. Аксиомы K.2-K.4 не являются определением функции P. Это всего лишь ограничения, которым должна удовлетворять каждая функция P, которая рассматривается как сопоставляющая случайным событиям их вероятности.

Практически вся теория вероятностей может быть выведена из этих аксиом. В частности, доказуемы следующие равенства.

- $P(\varnothing)=0$
- $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$
- $P(A)=P(A \cap B)+P(A \cap -B)$

Заметим, что 1 в аксиомах K.2 и K.3 взята для определенного удобства, и на самом деле вместо нее можно взять любое другое положительное действительное число.

Как и следует ожидать от математической теории, теория вероятностей не постулирует существования никаких вероятностных явлений. В первом параграфе своей ставшей классической книги [22, с.9-10] Колмогоров пишет: «*Всякая аксиоматическая (абстрактная) теория допускает, как известно, бесконечное число конкретных интерпретаций. Таким образом и математи-*

ческая теория вероятностей допускает наряду с теми интерпретациями, из которых она возникла, также много других. Так, мы приходим к приложениям математической теории вероятностей к таким областям науки, которые не имеют отношения к понятиям случая и вероятности в собственном смысле этого слова».

Запомним пока что эти слова и обратимся к тому, как относились и что думали по поводу теории вероятностей Лейбниц и Буль, внесшие большой вклад в развитие логики. Начнем с Лейбница, которого считают основоположником символической логики, и которому довелось жить как раз в то время, когда появилась теория вероятностей. Вот как характеризует отношении Лейбница к понятию вероятности Н.И.Стяжкин [33, с. 226–227].

«Нельзя не отметить пристального методологического интереса Лейбница к категории вероятности. По его мнению, "игнорирование изучения степеней вероятности – заметный дефект нашей логики". И он пытается устранить этот недостаток классических логических доктрин. ... У Лейбница в отличие от Декарта была уже вероятностная логика ("Об оценке недостоверного"). В этой логике имелись: непрерывная шкала вероятностей, принцип индифферентности ("равно принимать в расчет равноценные гипотезы" – один из короллариев закона достаточного основания), определение вероятности как меры знания, а также начатки учения об операциях над вероятностями».

Не будет лишним еще раз напомнить, что в основе широко используемых в логике семантик возможных миров лежит спекулятивная идея, связанная с метафизикой Лейбница. Каждый возможный мир является внутренне непротиворечивым и потому имеет шанс стать действительным миром. Действительный же мир – это наилучший из возможных. Отсюда и понимание им вероятности как степени возможности. Совершенный логический язык нужен Лейбницу для того, чтобы математически точно описать все возможные миры и оценить их вероятности стать действительным миром. Понимая вероятность эпистемически, он считал необходимым ее логическое рассмотрение.

Я.Хакинг [53] суммирует роль Лейбница в развитии понятия вероятности следующими словами.

«Он [Лейбниц] не сделал никакого серьезного вклада в теорию вероятностей, но всегда интересовался этим предметом. На самом деле он был первым философом вероятности. Он был первым, кто настаивал, что теорию вероятностей можно рассматривать как ветвь логики, сравнимую с теорией дедукции».

Говоря об истории современной логики нельзя не упомянуть Дж. Буля, именем которого даже названа алгебра, лежащая в основе классической логики. При ответе на вопрос, в каких работах он изложил свои основные результаты, обычно называют книгу «Laws of Thought» («Законы мысли»). Однако, если обратиться к библиографии работ Дж. Буля, то такой книги мы не обнаружим. Зато мы обнаружим книгу под названием «An Investigation of the Laws of Thought, in which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities» («Исследование законов мысли, на которых основаны математические теории логики и вероятностей»). Почти половина объема этой книги посвящены тому, что мы сегодня называем теорией вероятностей. Согласно Дж.

Булю, в основе теории вероятностей лежат *законы мысли*, т.е. свои способы рассуждений, своя логика.

«Буль более, чем кто-либо до него, осознал и использовал тесную связь между логикой союзов not, and, or и формальными свойствами вероятности. ... Как он считал, центральная проблема теории вероятностей заключалась в том, чтобы получить вероятность некоторого события (это событие выражено как высказывание) в терминах вероятностей других событий, каким-либо образом логически с ним связанных. ... В то время как Де Морган ограничивал себя рассмотрением умозаключений, в которых заключение является необходимым следствием посылок (хотя эти посылки могли быть лишь правдоподобны), в методе Буля никаких таких ограничений нет» [54].

Именно в работах Дж. Буля на конкретных алгебраических структурах впервые была показана четкая связь логики и теории вероятностей.

Всем нам известны в логике законы Де Моргана – еще одного отца современной логики. Если задать вопрос, как называется основной труд, который вышел из под пера Де Моргана, в ответ скорее всего назовут «Formal Logic». Однако, если обратиться к первоисточнику, то окажется, что этот труд имел подзаголовок «The Calculus of Inference, Necessary and Probable».

В данном случае для нас наибольший интерес представляет не то, что Лейбниц, Буль и Де Морган обратили внимание именно на понятие вероятности, а то, что они допускали возможным устанавливать логические отношения между предложениями языка исходя из их количественных оценок. При этом мы ни коем случае не собираемся зачислять их в основоположники многозначных логик.

Современный этап развития логики, начавшийся в XIX в. и получивший бурное продолжение в XX-м, бы связан, прежде всего, с потребностями математики, в которой теория вероятностей оказалась всего лишь одной из дисциплин – частным случаем теории меры. Ее призванием считалось служить инструментом для описания и изучения определенного круга явлений – вероятностных явлений. Именно поэтому все учебники теории вероятностей и начинают с многочисленных практических примеров, имеющих целью развить у читателя требуемую вероятностную интуицию. При этом совершенно упускается из вида ее отношение к логике.

Ненормальность сложившейся ситуации почувствовали многие исследователи и стали по-своему выражать отношение к этому. Появились работы с такими названиями как «*Probability Theory as Logic*» [56], «*Probability Theory: The Logic of Science*» [57], «*How Does Probability Theory Generalize Logic?*» [61] Если обратиться к сети Интернет, то можно обнаружить множество ссылок на эти и подобные им работы, что говорит о распространенности данной точки зрения. Связано это в первую очередь с тем, что для продуктивного развития науки и ее приложений требуется получение разнообразных количественных оценок, чего обычная логика сама по себе не дает. По сути дела в этих работах идет речь не о прикладной важности теории вероятностей, которая бесспорна и которую никто не собирается оспаривать, а об особом статусе теории вероятностей. Теория вероятностей, согласно взглядам авторов этих работ, – это не просто одна из математических теорий, а совокупность особых и необычайно эффективных способов рассуждений, что роднит ее с логикой.

Приведем одно интересное наблюдение над отношением логики и теории вероятностей, которое достойно размышлений. Универсальная природа логики такова, что при доказательстве ее метатеорем в метаязыке мы также используем логику. Логика присутствует одновременно в языке и в метаязыке. Если обратиться к теории множеств, то, доказывая ее теоремы, мы не используем теоретико-множественных свойств объектного языка, и в этом смысле теория множеств не выступает метаязыком по отношению к себе. Замечательное свойство теории вероятностей заключается в том, что в ней имеется ряд глубоких теорем, при доказательстве которых в качестве метаязыка также необходимым образом используется теория вероятностей. Это теоремы о так называемых критериях принятия гипотез.

Поясним это на следующем примере, который в общем виде передает суть многих критериев принятия гипотез. Пусть даны два случайных события S, V, и нас интересует, находятся ли они в некотором отношении H(S,V). Доказывается, что из истинности H(S,V) следует, что с большой вероятностью $\geq 1-\alpha$ (для достаточно маленького α) эти события должны находиться в определенном отношении $\varphi(S,V)$, которое может быть проверено эмпирически. Если теперь путем единичной эмпирической проверки выяснится, что имеет место $\neg\varphi(S,V)$, то отсюда следует, что с вероятностью $\geq 1-\alpha$ имеет место $\neg H(S,V)$. В виде правила это можно записать следующим образом.

$$H(S,V) \supset P(\varphi(S,V)) \geq 1-\alpha, \neg\varphi(S,V) \Rightarrow P(\neg H(S,V)) \geq 1-\alpha$$

Так вот интересно то, что это правило недоказуемо в объектном языке. Для его доказательства необходимо построить специальное вероятностное пространство, характеризующее отношение не событий S и V, которые поименованы термами объектного языка, а события H(S,V) и φ(S,V), термы для именования которых существуют в метаязыке.

XIII. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЛОГИКА ЛУКАСЕВИЧА

Стоит обратить внимание на то, что многие количественные соотношения, характерные для теории вероятностей, совершенно независимо от нее обнаруживаются и в логике. Складывается такое впечатление, что они гораздо более универсальны, чем это можно было предположить.

Многие годы большой интерес к себе вызывает логика Лукасевича. В 1920 г. появилась трехзначная логика Лукасевича, а в 1922/1923 он же обобщил ее до конечнозначного случая [60]. В настоящее время пристальное внимание к себе вызывает ее следующее бесконечнозначное обобщение.

Напомним определение этой логики [20]. Матрица вида $M_L = <[0..1], \sim, \rightarrow, \{1\}>$ называется бесконечнозначной матрицей Лукасевича, где $\sim$ есть унарная операция отрицания, а $\rightarrow$ есть бинарная операция импликации, определенные на множестве [0..1] следующим образом:

L.1 $\sim x = 1-x$

L.2 $x \rightarrow y = \min(1, 1-x+y)$.

Операции конъюнкции и дизъюнкции в виде максимума и минимума можно ввести по определению:

L.3 $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y = \max(x,y)$

L.4 $x \wedge y = \sim(\sim x \vee \sim y) = \min(x,y)$

Мы помним, что в классической логике конъюнкцию и дизъюнкцию можно определить и другим эквивалентным способом. В логике Лукасевича такая эквивалентность не имеет места, но сами операции представляют определенный интерес.

L.5 $x\#y = \sim x \to y = \min(1, x+y)$
L.6 $x\&y = \sim(x \to \sim y) = \sim(\sim x\#\sim y) = \max(0, x+y-1)$

Так как операции # и $\to$ определимы друг через друга, т.е. $x \to y = \sim x\#y$, то в качестве исходной матрицы для бесконечнозначной логики Лукасевича мы могли бы взять $M_L=<[0,1], \sim, \#, \{1\}>$. Точно так же в качестве исходной матрицы можно взять $M_L=<[0,1], \sim, \&, \{1\}>$ и определить импликацию посредством $x \to y = \sim(x\&\sim y)$. Определить же импликацию Лукасевича посредством операций, вводимых определениями L.1, L.3 и L.4, невозможно.

Чем интересны операции # и &? Оказывается, они и определимые через них $\wedge$ и $\vee$ имеют непосредственное отношение к теории вероятностей.

Пусть дано вероятностное пространство $<\Omega, F, P>$ и два произвольных события A и B, которым сопоставлены вероятности P(A) и P(B). Больше ничего об этих событиях мы не знаем. Требуется ответить на вопрос, каковы вероятности событий $A \cap B$ и $A \cup B$? Дать однозначный ответ мы не можем, так как не знаем, в каких еще отношениях находятся события A и B. Единственное, что мы можем, – это рассмотреть возможные предельные случаи и указать наименьшую верхнюю и наибольшую нижнюю грани для $P(A \cap B)$ и $P(A \cup B)$.

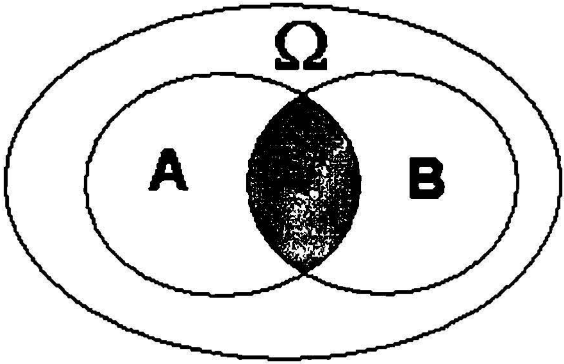

Рис. 8

Верхняя граница для $P(A \cap B)$ не может превышать $\min(P(A),P(B))$ и достигается лишь тогда, когда одно из событий включено в другое, т.е. $A \subseteq B$ или $B \subseteq A$.

Для определения нижней границы мы должны рассмотреть два случая, когда $P(A)+P(B) \geq 1$ и когда $P(A)+P(B)<1$. В первом случае $P(A \cap B) \geq P(A)+P(B)-1$, а во втором $P(A \cap B) \geq 0$. Если свести это к одному соотношению, то $P(A \cap B) \geq \max(0,P(A)+P(B)-1)$.

Если теперь посмотреть на определение операций $\wedge$ и &, то мы можем записать следующие неравенства.

$$[P(A)]\&[P(B)] \leq P(A \cap B) \leq [P(A)] \wedge [P(B)]$$

Легко получить двойственные соотношения.

$$[P(A)] \vee [P(B)] \leq P(A \cup B) \leq [P(A)]\#[P(B)]$$

Таким образом, мы можем рассматривать бесконечнозначную логику Лукасевича как теорию верхних и нижних границ для сложных событий теории вероятностей. Заметим, что приведенные выше неравенства именно так и используются во многих вероятностных логиках с интервальными оценками.

В последнее время появилось расширение логики Лукасевича, именуемое product-логика Лукасевича. Она получается добавлением в матрицу еще одной операции*, интерпретируемой посредством произведения x и y. Интересно то, что этой операции в теории вероятностей также соответствует своя оценка – оценка пары независимых событий.

XIV. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И КВАНТИТАТИВНАЯ ЛОГИКА

Представим на минуту, что мир вдруг изменился и стал абсолютно детерминированным. В нем исчезли те явления, которые мы обычно называем вероятностными, исчезли азартные игры, закрылись казино, исчезли, разумеется, и вероятностные логики. Теория меры в математике сохранится, так как она имеет много других приложений. А вот будет ли смысл сохранить ее раздел, известный под названием теории вероятностей? Т.е. останутся ли у этой теории хорошие интерпретации в мире, все события которого строго детерминированы? Понятно, что хоть какую-нибудь интерпретацию этой теории всегда можно найти в силу ее непротиворечивости, а вот можно ли будет найти интересную интерпретацию? Оказывается, да.

Если взять конечную модель для логики высказываний $M=\langle W, |.|, n\rangle$, то на ее основе мы можем построить поле вероятностей $\langle \Omega, F, P\rangle$, где

$\Omega = W$
$F = \{|A|: A$ – формула языка логики высказываний$\}$
$P(|A|) = n(|A|)$

Легко проверить, что для так определенного поля вероятностей выполняются аксиомы К.1-К.4.

К.1' F является алгеброй множеств:
 В.1 $W=|A\vee\neg A|\in F$

B.2 Если $|A| \in F$ и $|B| \in F$, то $|A| \cup |B| = |A \vee B| \in F$, $|A| \cap |B| = |A \& B| \in F$ и $|A| \setminus |B| = |A \& \neg B| \in F$

K.2' $0 \leq P(|A|) \leq n(W)$

K.3' $P(W)=n(W)$

K.4' $P(|A| \cup |B|)=P(|A|)+P(|B|)$, если $|A| \cap |B| = \varnothing$.

При желании, аксиомы K.2' и K.3' легко привести к стандартному виду. Для этого достаточно переопределить функцию P следующим образом

$$P(|A|) = n(|A|)/n(W)$$

Таким образом, мы получили, что теория вероятностей в ее общей части является теорией количественных оценок областей истинности формул классической логики высказываний и в определенном смысле является количественным напарником стандартной булевой семантики. При этом оказывается, что все основные отношения между объемами множеств, которые используются при задании стандартной семантики классической логики, выразимы в языке теории вероятностей.

- $|A|=W \Leftrightarrow P(|A|)=1$
- $|A| \subseteq |B| \Leftrightarrow P(|A| \cap |B|)=P(|A|)$
- $|A| \cap |B| \neq \varnothing \Leftrightarrow P(|A| \cap |B|)>0$

Можно подумать, что ничего нового мы не получили, а всего лишь пришли к давно известной логической интерпретации теории вероятностей. Да, подумать можно, но это не так. Важно не только то, что мы формально получили в результате, но и мотивация наших действий, которая привела к конечному результату. Дело в том, что мы не ставили себе цели дать логическую интерпретацию теории вероятностей и не ориентировались на построение теории явлений, имеющих вероятностную природу. Мы вообще предположили, что все явления мира строго детерминированы, и, тем не менее, обнаружили неразрывно связанную с логикой структуру, являющуюся естественной моделью аксиом теории вероятностей. Теперь мы просто не имеем права, рассуждая о логике, не учитывать присущие ей количественные соотношения.

Вполне естественным желанием является определить отношение квантитативного следования. Можно, конечно, пойти по стандартному пути и дать следующее определение:

$$B_1,\ldots,B_k \,||\!=A \Leftrightarrow |B_1|\cap\ldots\cap|B_k|\subseteq|A| \Leftrightarrow$$
$$P(|B_1|\cap\ldots\cap|B_k|)=P(|A|\cap|B_1|\cap\ldots\cap|B_k|)$$

В этом случае мы просто сводим квантитативное следование к обычному, теряя всю специфику количественных оценок формул. Поэтому перефразируем приведенную выше цитату слов Хэйлпирена о Дж. Буле следующим образом. *Центральная проблема логики, базирующейся на количественных соотношениях, заключается в том, чтобы получить количественную оценку некоторой формулы в терминах количественных оценок других формул, каким-либо образом с нею связанных.* Но «*получить количественную оценку некоторой формулы в терминах количественных оценок других формул, каким-либо образом с нею связанных*» в точности означает, что требуется связать функциональной связью количественную оценку некоторой формулы с количественными оценками других формул так, чтобы была возможность вычислить эту оценку.

$$B_1,\ldots,B_k \Vert\!= A \Leftrightarrow \exists f \forall M(|A| = f(|B_1|,\ldots,|B_k|))$$

Именно такое определение следования для квантитативной логики **QL** мы и дали в предыдущих параграфах.

При переходе от конечных к бесконечным моделям мы можем пойти по ставшему традиционным пути обобщения случая конечных моделей. Чисто формально мы ничего не теряем, но становится непонятно, о каких количественных оценках областей истинности формул может идти речь, если эти области бесконечны?

Определенную подсказку в этом случае нам может дать частотная интерпретация вероятности Мизеса [25]. Для него вероятность события – это «*предел относительной частоты его осуществления в бесконечной серии испытаний*» [15]. Он принимает всего две аксиомы. Первая, *аксиома сходимости*, постулирует, что относительная частота осуществления события имеет предел. Вторая, *аксиома иррегулярности*, требует, чтобы последовательность испытаний имела случайный характер. Даже если событие может иметь всего два исхода, как, например, бросание монеты или вытаскивание из ящика с черным и белым шаром одного из них, требуется бесконечная серия испытаний, чтобы определить вероятность того или иного исхода. Легко показать, что определенная таким образом вероятность удовлетворяет аксиомам Колмогорова. Таким образом, отличие определения Колмогорова от определения Мизеса заключается в том, что в первом случае свойства функции P задаются аксиоматически, а во втором – операционально с использованием математической теории пределов.

В случае бесконечных (счетных) моделей мы можем поступить следующим образом. Пусть W – счетное множество возможных миров, а S=<$w_1,w_2,\ldots$> – некоторое их упорядочение по типу ω. Для каждого натурального n пусть S_n будет начальным сегментом <$w_1,w_2,\ldots,w_n$> последовательности S. Для каждой пропозициональной переменной q нашего языка пусть N(q,n) будет числом миров последовательности S_n, в которых она истинна. Количественная оценка P(q) переменной q определяется следующим образом:

$$P(q) = \lim_{n\to\infty} N(q,n)/n$$

Легко проверить, что для определенной таким образом количественной оценки справедливы аксиомы Колмогорова K.1-K.4.

Очевидно, что величина приписываемой оценки будет зависеть от конкретного упорядочения множества W, которое должно быть включено в понятие модели M=<W,|.|,S> вместо функции количественной оценки n. Например, если в качестве множества W взять множество всех натуральных чисел с естественным порядком на нем, то относительная частота четных чисел будет равна 0,5. Но это лишь один из возможных порядков. Мы могли бы переупорядочить натуральные числа таким образом, чтобы четные числа встречались с частотой 0,3 или 0,003. Чтобы не зависеть от конкретного порядка, а отталкиваться лишь от вероятностной природы изучаемых событий, Мизес требует выполнения аксиомы иррегулярности последовательности испытаний. Возможно, что именно этот пункт и является точкой содержательного, но не формального расхождения теории вероятностей и теории количественных оценок областей истинности формул. *С логической точки зрения, нам не требуется, чтобы порядок на множестве возможных миров был иррегулярным.* В зависимости от конкретной задачи мы можем быть заинтересованы в той или иной его регулярности. Например, при переборе слов некоторого алфавита мы можем упорядочить их лексикографически, определяя в зависимости от этого относительные частоты слов с требуемыми свойствами. Теория вероятностей по своей содержательной сути в данном случае будет неприменима, а равносильная ей теория количественных оценок может быть применена.

XV. КАТЕГОРНЫЙ АНАЛИЗ АЛЬТЕРНАТИВНОГО СЛЕДОВАНИЯ

В конце параграфа, посвященного альтернативному определению логического следования, мы показали, что оно имеет чисто функциональное представление. При последующем построении логик ACL, QL и LQL логические связки задавались посредством операций на областях определения и значения функций, сопоставляемых формулам языка. В случае ACL это были булевы операции, в случае QL и LQL – операции с числами. Но это не единственно возможный способ определения логических связок. Если природа функциональных соотношений и предметной области никак не специфицированы, а именно этот случай и должен в первую очередь интересовать логиков, связки могут быть проинтерпретированы в терминах операций над функциями. В этом случае наиболее подходящим для анализа математическим аппаратом является теория категорий. Нашей задачей будет определение свойств, которыми обладает категория, соответствующая логике альтернативного следования.

Фиксируем язык логики.

1. Var – множество пропозициональных переменных;
2. &, $\vee$ – логические связки;
3.), (– скобки.

Определение множества формул Frm – обычное.

Пусть $Val = \{0,1\}^{Var}$ – множество приписываний истинностных значений пропозициональным переменным нашего языка, обычным образом распространяемое на все формулы языка.

Согласно определению альтернативного следования, из множества формул $\Gamma=\{B_1,\ldots,B_n\}$ *следует* формула A, если и только если существует такая булева функция $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$, которая позволяет для произвольного приписывания $v\in Val$ на основании оценок $v(B_1),\ldots,v(B_n)$ вычислить оценку $v(A)$, т.е. $v(A)=f(v(B_1),\ldots,v(B_n))$.

$$\{B_1,..,B_n\}\|{=}A \Leftrightarrow \exists f\forall v(v(A)=f(v(B_1),..,v(B_n))$$

Всякой формуле A может быть сопоставлена некоторая булева функция $\mathbf{A}:Val \to \{0,1\}$, определяемая условием $\mathbf{A}(v)=v(A)$.
С учетом этого наше определение альтернативного следования примет иной вид:

$$\{B_1,..,B_n\}\|{=}A \Leftrightarrow \exists f\forall v(\mathbf{A}(v)=f(\mathbf{B}_1(v),..,\mathbf{B}_n(v)))$$

В силу универсальной квантификации его можно записать еще проще:

$$\{B_1,..,B_n\}\|{=}A \Leftrightarrow \exists f(\mathbf{A}=f(\mathbf{B}_1,..,\mathbf{B}_n))$$

При таком представлении пропозициональным переменным сопоставляются уже не сами истинностные значения, а некоторые функции на них. Природа истинностных значений никак не специфицирована. Множество Val, на котором определены функции $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1$,.., $\mathbf{B}_n$, может пониматься как множество возможных состояний мира, но сама природа описания этих состояний не важна. Это могут быть описания в булевых, числовых, геометрических и прочих терминах. Независимо от конкретной специфики логика определяет правила перехода от одних описаний состояния мира к другим.

Так как аргументы функции $f(B_1,..,B_n)$ упорядочены, представим их в виде кортежа $<B_1,..,B_n>$, и тогда наше определение примет следующий вид:

$$\{B_1,..,B_n\}||=A \Leftrightarrow \exists f(A=f\circ<B_1,..,B_n>)$$

Теперь мы можем выразить наше определение на языке диаграмм. *Из множества формул $\{B_1,..,B_n\}$ следует формула A, если и только если существует такая функция f, что следующая диаграмма коммутативна:*

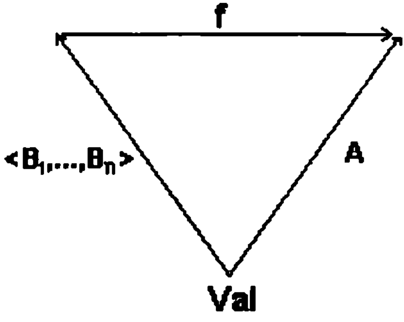

Рис. 9

Обратим внимание на совпадение областей определения функций, которые мы сопоставляем формулам логики альтернативного следования. На области значе-

ния этих функций никаких ограничений не налагается, а вот области их определения должны совпадать.

Следующая наша задача – переформулировать определение альтернативного отношения следования на языке теории категорий. Но прежде необходимо напомнить само определение категории.

Def. 18 Категория C состоит из:

- Объектов obj(C)= a,b,c,…
- Стрелок arr(C)= f,g,h,...
- Каждой из стрелок f сопоставлены два объекта dom(f) и cod(f). Запись $f:a\rightarrow b$ означает, что dom(f)=a и cod(f)=b.
- Для любых двух стрелок $f:a\rightarrow b$ и $g:b\rightarrow c$ существует стрелка $g\circ f:a\rightarrow c$, называемая их композицией.
- Каждому объекту a сопоставлена стрелка $1_a:a\rightarrow a$, называемая единичной.
- Для любых трех стрелок $f:a\rightarrow b$, $g:b\rightarrow c$, $h:c\rightarrow d$ имеет место закон ассоциативности $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.
- Для любой стрелки $f:a\rightarrow b$ имеют место равенства $1_b\circ f=f\circ 1_a=f$.

Примером конкретной категории является категория **Set**, объекты которой – множества, а стрелки – функции между ними. Единичная стрелка 1_a – это тождественная функция на a. Во избежание двусмысленности уточним, что под теоретико-множественной функцией f мы будем понимать тройку $f=\langle a,b,R\rangle$ где $R\subseteq a\times b$ – отношение между множествами a и b, такое, что $\forall x\in a\exists!y\in b(\langle x,y\rangle\in R)$. Множество a называется областью определения функции f, а множество b – областью ее значений. Множество $f(a)=\{y|\exists x(<x,y>\in R\}$ называется f-образом множества a.

Для анализа следования нас в первую очередь будет интересовать не сама категория **Set**, а определенная с ее помощью относительная категория **Set**$\uparrow$V, объектами которой являются все функции с фиксированной областью определения V. Если даны два **Set**$\uparrow$V-объекта $g:V\rightarrow b$ и $h:V\rightarrow c$, то **Set**$\uparrow$V-стрелками из g в h будут все такие функции $f:b\rightarrow c$ категории **Set**, для которых выполняется равенство $h=f\circ g$, т.е. коммутативна следующая диаграмма.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "f"] & & c \\
& V \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 10

Легко проверить, что **Set**$\uparrow$V действительно является категорией. Посмотрим, как в ней выглядят стандартные категорные конструкции.

Def.19 Произвольная стрелка $f: a\rightarrow b$ называется *изострелкой*, если существует стрелка $g:b\rightarrow a$, такая, что $f\circ g=1_b$ и $g\circ f=1_a$.

В случае категории **Set** изострелки – это биекции двух множеств. Два объекта a и b называются *изоморфными*, если существует изострелка $f: a\rightarrow b$. Изоморфизм объектов a и b будем обозначать посредством a≈b. В категории **Set**↑V изострелками также являются биекции.

Def.20 Объект 0 называется *начальным*, если для любого другого объекта b существует единственная стрелка 0_b:0→b.

В случае категории **Set** начальный объект единственен, и им является пустое множество ∅. В случае же категории **Set**↑V одним из начальных объектов, который мы будем использовать в дальнейшем, является тождественная функция 0:V→ V, определяемая как $0(x)=id_V(x)=x$. Очевидно, что для любого другого объекта g:V→b существует единственная функция 0_b, которая делает коммутативной следующую диаграмму и которая равна g, т.е. $0_b(x)=g(x)$.

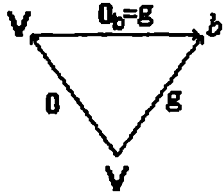

Рис. 11

В категории **Set** из существования стрелки a→0 следует, что a≈0, а если быть более точным, то a=∅. В категории **Set**↑V это не имеет места. Для доказательства данного факта достаточно построить контрпример.

Пусть V={1,…,n}, b={1,…,n+1}, а g – функция из V в b, задаваемая посредством равенства g(x)=x и являющаяся объектом в Set↑V. Очевидно, что функция $f{:}b \to V$, задаваемая посредством $f(x)=x$ для $x \le n$ и $f(n+1)=n$, является стрелкой категории Set↑V из ее объекта g в ее начальный объект id_V, так как композиция $f \circ g$ равна id_V. В то же время, очевидно, что не существует биекции множеств $\{1,\ldots,n\}$ и $\{1,\ldots,n+1\}$, т.е. объекты g и id_V не являются изоморфными в Set↑V.

Def.21 Объект 1 называется *конечным*, если для любого другого объекта a существует единственная стрелка $l_a{:}a \to 1$.

В случае категории Set конечным объектом является любое одноэлементное множество. В случае же категории Set↑V конечным объектом является любая функция $1{:}V \to a$, где a – одноэлементное множество. Очевидно, что для любого другого объекта $g{:}V \to b$ существует единственная стрелка (функция) $l_b{:}b \to \{*\}$, для которой выполняется $l_b \circ g=1$. l_b определяется единственным способом $l_b(x)= *$.

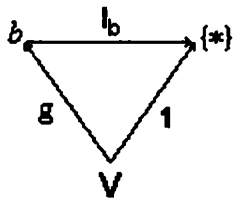

Рис. 12

Очевидно, что в категории Set↑V имеется много конечных объектов, но все они изоморфны. Это же справедливо и для начальных объектов Set↑V.

Следующий категорный конструкт, который нас будет интересовать, – это произведение объектов. Напомним его определение.

Def.22 Объект $b\times c$ вместе с двумя называемыми *проекциями* стрелками $pr_b{:}b\times c\to b$ и $pr_c{:}b\times c\to c$ является *произведением объектов* b и c, если и только если для любого другого объекта d и любых двух стрелок $i{:}d\to b$ и $j{:}d\to c$ существует единственная стрелка $e{:}d\to b\times c$, такая, что $pr_b\circ e=i$ и $pr_c\circ e=j$.

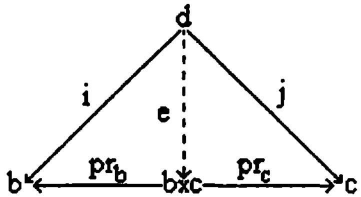

Рис. 13

В категории **Set** произведение двух объектов – это обычное декартово произведение двух множеств. Функции проекции pr_b и pr_c определяются как $pr_b(\langle x,y\rangle)=x$ и $pr_c(\langle x,y\rangle)=y$, а функция e задается условием $e(x)=\langle i(x),j(x)\rangle$.

В относительной категории $\mathbf{Set}\uparrow V$ определение произведения выглядит следующим образом.

Def.23 Объект $\langle g,h\rangle{:}V\to b\times c$ вместе с двумя называемыми *проекциями* стрелками $pr_b{:}\langle g,h\rangle\to g$ и $pr_c{:}\langle g,h\rangle\to h$ является *произведением объектов* $g{:}V\to b$ и

$h:V\to c$, если и только если для любого другого объекта $f:V\to d$ и любых двух стрелок $i:f\to g$ и $j:f\to h$ существует единственная стрелка $e:f\to\langle g,h\rangle$, такая, что $pr_b\circ e=i$ и $pr_c\circ e=j$.

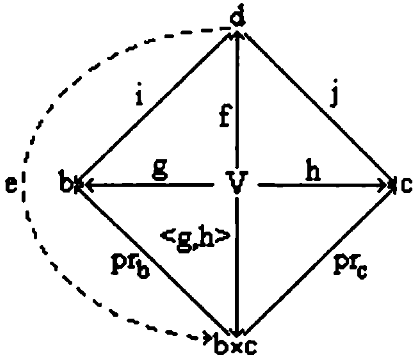

Рис. 14

Объект $\langle g,h\rangle:V\to b\times c$ – это функция, определяемая условием $\langle g,h\rangle(x)=\langle g(x),h(x)\rangle$. Областью ее значений является декартово произведение $b\times c=\{\langle x,y\rangle |\ x\in b, y\in c\}$, а стрелки $pr_b:b\times c\to b$ и $pr_c:b\times c\to c$ – это обычные функции проекции, определяемые условиями $pr_b(\langle x,y\rangle)=x$ и $pr_c(\langle x,y\rangle)=y$. Функция $e:d\to b\times c$ определяется условием $e(x)=\langle i(x),j(x)\rangle$.

В категории **Set** для любого объекта b имеет место $0\approx 0\times b$. В случае категории **Set**$\uparrow$V это неверно. Например, если множества V и b содержат по два элемента, то их декартово произведение содержит уже четыре элемента, что не позволяет установить биекцию с V.

Следующий интересующий нас конструкт – сумма (копроизведение) объектов. В произвольной абстрактной категории его определение имеет следующий вид.

Def.24 Объект b+c вместе с двумя называемыми *инъекциями* стрелками i_b:b→b+c и i_c:c→b+c является *суммой (копроизведением) объектов* b и c, если и только если для любого другого объекта d и любых двух стрелок k:b→d и j:c→d существует единственная стрелка e:b+c→d такая, что $e \circ i_b$=k и $e \circ i_c$=j.

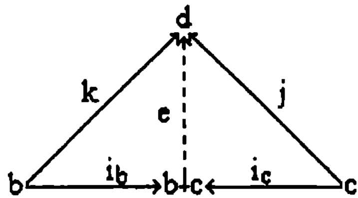

Рис. 15

В категории **Set** сумма двух объектов B и C определяется как дизъюнктное объединение B+C={B×{0}}∪{C×{1}}, а функции инъекции определяются условиями i_b(x)=<x,0> и i_c(y)=<y,1>. В этом случае условия вычисления функции e задаются как e(<x,0>)=k(x) и e(<y,1>)=j(y).

В относительной категории **Set**↑V определение суммы объектов выглядит несколько сложнее.

Def.25 Объект g⊕h:V→b⊕c вместе с двумя называемыми *инъекциями* стрелками i_b:g→g⊕h и i_c:h→g⊕h является *суммой объектов* $g:V \to b$ и $h:V \to c$, если и только если для любого другого объекта $f:V \to d$ и любых двух стрелок $k:g \to f$ и $j:h \to f$ существует единственная стрелка $e:g \oplus h \to f$, такая, что $e \circ i_b = k$ и $e \circ i_c = j$.

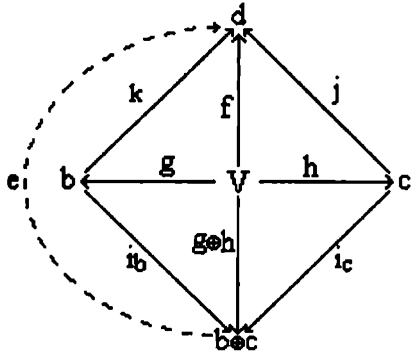

Рис. 16

В категории **Set**↑V для построения суммы $g \oplus h$ двух объектов g и h берется дизъюнктное объединение b+c множеств, и на нем задается разбиение $b \oplus c$ на классы эквивалентности. Само отношение эквивалентности определяется как наименьшее отношение эквивалентности, содержащее множество пар $\{<x,y> | \exists z(x=<g(z),0>, y=<h(z),1>)\}$. Функции инъекции определяются условиями $i_b(x)=|<x,0>|$ и $i_c(y)=|<y,1>|$, а $g \oplus h$ – любым из двух условий $g \oplus h(z)=|<g(z),0>|$ или $g \oplus h(z)=|<h(z),1>|$. Функция e также определяется любым из двух условий $e(|<x,0>|)=k(x)$ или $e(|<x,1>|)=j(x)$.

Мы подошли к тому, чтобы определить интерпретацию альтернативного отношения следования в терминах теории категорий.

Def. 26 Категорной **Set**-моделью логики альтернативного следования будем называть пару $M=\langle \mathbf{Set}\uparrow V, I\rangle$, где $\mathbf{Set}\uparrow V$ – относительная категория, а I – функция интерпретации $I{:}Var\rightarrow obj(\mathbf{Set}\uparrow V)$, которая расширяется на все множество формул Frm следующим образом:

- $I(A\&B)=\langle I(A),I(B)\rangle$
- $I(A\vee B)=I(A)\oplus I(B)$

Def.27 В категорной **Set**-модели $M=\langle \mathbf{Set}\uparrow V, I\rangle$ из последовательности формул $B_1,..,B_n$ следует формула A, если и только если существует стрелка $f{:}\langle I(B_1),..,I(B_n)\rangle\rightarrow I(A)$.

$$B_1,..,B_n\|{=}_M A \Leftrightarrow$$
$$\exists f\in arr(\mathbf{Set}\uparrow V)(f{:}\langle I(B_1),..,I(B_n)\rangle\rightarrow I(A))$$

Правая часть определения эквивалентна тому, что в исходной категории **Set** имеет место равенство $f\circ\langle I(B_1),..,I(B_n)\rangle = I(A)$.

Def.28 Из последовательности формул $B_1,..,B_n$ следует формула A, если и только если она следует в каждой категорной **Set**-модели.

Лемма 4. В категории $\mathbf{Set}\uparrow V$ для любого конечного числа объектов $g_1{:}a\rightarrow b_1,\ldots,g_n{:}a\rightarrow b_n$ существует следующие стрелки:

a) $perm_{j1,\ldots,jn}{:}\langle g_1,\ldots,g_n\rangle \rightarrow \langle g_{j1},\ldots,g_{jn}\rangle$
b) $add_i{:}\langle b_1,\ldots,b_i,\ldots,b_n\rangle\rightarrow \langle b_1,\ldots,b_i,b_i,\ldots,b_n\rangle$
c) $del_i{:}\langle b_1,\ldots,b_i,\ldots,b_n\rangle\rightarrow \langle b_1,\ldots,b_n\rangle$

Для доказательства этого достаточно простых свойств, которыми обладают произведения объектов и стрелки проекций.

Лемма 5. Определенное нами отношение следования обладает следующими свойствами:

a) $A \Vdash A$
b) $\Sigma, A \Vdash A$
c) $B_1,..,B_n \Vdash A \Rightarrow B_{i1},..,B_{in} \Vdash A$
d) $\Sigma \Vdash A \Rightarrow \Sigma, B \Vdash A$
e) $\Sigma, B, B \Vdash A \Rightarrow \Sigma, B \Vdash A$
f) $\Sigma \Vdash A;\ \Delta, A \Vdash B \Rightarrow \Delta, \Sigma \Vdash B$
g) $\Sigma \Vdash A; \Sigma \Vdash B \Rightarrow \Sigma \Vdash A\&B$
h) $\Sigma \Vdash A\&B \Rightarrow \Sigma \Vdash A$
i) $\Sigma, A, B \Vdash C \quad \Rightarrow \Sigma, A\&B \Vdash C$
j) $A \Vdash C; B \Vdash C \Rightarrow A \vee B \Vdash C$
k) $\Sigma \Vdash A \quad \Rightarrow \Sigma \Vdash A \vee B$

Доказательство.

a) $A \Vdash A$ имеет место в силу существования единичной стрелки $1_{I(A)}:I(A) \rightarrow I(A)$.

b) Для доказательства этого свойства достаточно взять функцию проекции: $pr_2:\langle I(\Sigma),I(A)\rangle \rightarrow I(A)$.

c) По условию существует стрелка $f:\langle I(B_1),..,I(B_n)\rangle \rightarrow I(A)$. В силу леммы 4 существует стрелка перестановки $perm:\langle I(B_{i1}),..,I(B_{in})\rangle \rightarrow \langle I(B_1),..,I(B_n)\rangle$. Их композицией будет стрелка $f \circ perm:\langle I(B_{i1}),..,I(B_{in})\rangle \rightarrow I(A)$.

d) По условию существует стрелка $f:I(\Sigma)\to I(A)$. Тогда ее композиция с проекцией $pr_1:\langle I(\Sigma),I(B)\rangle\to I(\Sigma)$ будет стрелкой $f\circ pr_1:\langle I(\Sigma),I(B)\rangle\to I(A)$.

e) По условию существует стрелка $f:\langle I(\Sigma),I(B),I(B)\rangle\to I(A)$. В силу леммы 4 существует стрелка $add:\langle I(\Sigma),I(B)\rangle\to\langle I(\Sigma),I(B),I(B)\rangle$. Их композицией будет стрелка $f\circ add:\langle I(\Sigma),I(B)\rangle\to I(A)$.

f) По условию существуют стрелки $f:I(\Sigma)\to I(A)$ и $g:\langle I(\Delta),I(A)\rangle\to I(B)$. Это означает, что в исходной категории **Set** имеют место равенства $f\circ I(\Sigma)=I(A)$ и $g\circ\langle I(\Delta),I(A)\rangle= I(B)$. Но тогда в исходной категории будет выполняться и следующее равенство $I(B) = g\circ\langle I(\Delta),f\circ I(\Sigma)\rangle = g\circ\langle pr_1,f\circ pr_2\rangle\circ\langle I(\Delta),I(\Sigma)\rangle$. Это означает, что в относительной категории **Set**$\uparrow$V имеется стрелка $g\circ\langle pr_1,f\circ pr_2\rangle:\langle I(\Delta),I(\Sigma)\rangle\to I(B)$.

g) Даны стрелки $f:I(\Sigma)\to I(A)$ и $g:I(\Sigma)\to I(B)$. В силу существования произведений объектов $I(A)$ и $I(B)$ будет существовать стрелка $\langle f,g\rangle:I(\Sigma)\to\langle I(A),I(B)\rangle$.

h) Дана стрелка $f:I(\Sigma)\to\langle I(A),I(B)\rangle$. Тогда ее композиция с проекцией даст стрелку $pr_1\circ f:I(\Sigma)\to I(B)$.

i) Дана стрелка $f:\langle I(\Sigma),I(A),I(B)\rangle\to I(C)$. В силу изоморфизма объектов $\langle I(\Sigma),I(A),I(B)\rangle\cong\langle I(\Sigma),\langle I(A),I(B)\rangle\rangle$ существует искомая стрелка $g:\langle I(\Sigma),\langle I(A),I(B)\rangle\rangle\to I(C)$.

j) Даны две стрелки $f:I(A)\to I(C)$ и $g:I(B)\to I(C)$. В силу существования сумм любых двух объектов существует и искомая стрелка $f\oplus g:I(A)\oplus I(B)\to I(C)$.

k) Дана стрелка $f{:}I(\Sigma)\to I(A)$. Ее композиция с инъекцией i_a $:I(A)\to I(A)\oplus I(B)$ даст искомую стрелку $i_a\circ f$: $I(\Sigma)\to I(A)\oplus I(B)$.

Лемма доказана.

Закономерно поставить вопрос о расширении языка дополнительной связкой импликации и определении ее интерпретации в терминах категорных моделей. Категорный конструкт, являющийся коррелятом импликации, называется экспоненциалом.

Def. 29 *Экспонентой* двух объектов b и c называется объект c^b (экспоненциал) и стрелка $ev{:}c^b\times b\to c$ (стрелка значения), такие, что для любого объекта d и стрелки $g{:}d\times b\to c$ существует единственная стрелка $\mathbf{g}{:}d\to c^b$, для которой следующая диаграмма коммутативна. Говорят, что категория допускает экспоненцирование, если экспонента существует для любых двух ее объектов.

$$\begin{tikzcd}
c^b\times b \arrow[dr, "ev"] & \\
& c \\
d\times b \arrow[uu, dashed, "\mathbf{g}\times id_b"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 17

В категории **Set** смысл экспоненты следующий. Объект c^b – это множество всех функций из b в c. Стрелка значения ev определяется как приложение функции к аргументу $ev(<f,x>)=f(x)$. Каждому фиксированному $x \in d$ можно сопоставить функцию $g_x:b \to c$, задаваемую посредством равенства $g_x(b)=g(<x,b>)$. Именно это сопоставление и осуществляет функция $g:d \to c^b$.

Теорема о несуществовании экспонент в Set↑V. В категории **Set↑V** неверно, что любые два ее объекта имеют экспоненту.

Доказательство очень простое. Дело в том, что во всякой категории с экспоненциалами, для любого объекта b имеет место $0 \approx 0 \times b$. Также в этих категориях из существования стрелки $a \to 0$ следует $a \approx 0$. Как мы уже показали выше, данные соотношения не выполняются в категории **Set↑V**. Единственным ограничением наших контрпримеров была конечность множества V. Покажем, что и в случае бесконечности множества V категория **Set↑V** не допускает экспоненцирования.

Пусть Hom(a,b) – это множество стрелок из a в b. Во всякой категории с экспоненциалами имеет место биекция между $Hom(d \times b,c)$ и $Hom(d,c^b)$.

В категории **Set↑V** для любого объекта z множество $Hom(id_V,z)$ состоит из одного элемента, так как id_V является начальным объектом. Пусть f – функция из V в множество {0,1}, задаваемая посредством $f(x)=0$ для всех $x \in V$. Очевидно, что она является объектом категории **Set↑V**. Пусть $<id_V,f>$ – функция из V в $V \times \{0,1\}$, являющаяся произведением объектов id_V и f категории **Set↑V**. Тогда очевидно, что имеются по крайней мере две функции f1 и f2 из $V \times \{0,1\}$ в {0,1}, таких, что $f1 \circ <id_V,f>=f$ и $f2 \circ <id_V,f>=f$. Их можно задать таблицей

x	f1(x)	f2(x)
<y,0>	0	0
<y,1>	0	1

На самом деле, в случае конечности множества V, $Hom(<id_V,f>,f)$ содержит 2^n элементов, а в случае счетности V мощность этого множества равна континууму. Т.е. мы показали, что биекции между $Hom(<id_V,f>,f)$ и $Hom(id_V,z)$ не существует.

Таким образом, неверно, что в категории **Set**↑V любые два ее объекта имеют экспоненту.

Теорема доказана.

Смысл этой теоремы заключается в том, что в альтернативной логике принципиально невозможно определить связку импликации, для которой имели бы место теорема дедукции и модус поненс. Но эта же теорема дает повод для более глубоких размышлений. Когда мы обнаружили, что логика альтернативного следования имеет функциональную семантику, вполне естественным было ожидать, что в результате мы придем к интуиционистской логике и интуиционистской импликации. Этого не случилось. Почему? Ответ стоит искать в том, как исторически строилась интуиционистская логика, и как строили логику альтернативного следования мы. При построении интуиционистской логики прежде всего пытались исходить из смысла логических связок, чтобы они допускали конструктивную интерпретацию в смысле реализуемых построений. Отсюда берет начало истолкование дизъюнкции, импликации, отрицания. Затем из отдельных частей, как из конструктора, собрали интуиционистскую логику и стали подыскивать для нее математически строгую интерпретацию. Таких интерпретаций появилось довольно много – реализуемостная, доказуемостная, крипкевская, категорная и пр. Мы же исходили в первую очередь из более фундаментального, чем связки, понятия логического следования как возможности на основании построений, представленных посылками, перейти к построению, представленному заключением. Логические связки появились позже. Результат – совершенно другая логика. Более того, уже сейчас имеются определенные основания высказать гипотезу, что наша логика близка к логике Брауэра, являющейся дуалом интуиционистской логики.

Проведенный нами анализ не является исчерпывающим, а скорее служит иллюстрацией того, как может быть применен математический аппарат теории категорий для выяснения свойств отношения альтернативного логического следования. Тем не менее, определенные выводы мы можем сделать уже сейчас. Ни для кого не является секретом глубокая внутренняя связь между теорией категорий и логикой. В работах по дедуктивным категориям обращается внимание на то, что дедуктивные системы могут быть представлены как специального вида категории, а сами категории в свою очередь можно рассматривать как альтернативный способ порождения дедуктивных систем. Т.е. обращается внимание на теоретико-доказательный подход в логике. Вместе с тем имеются и работы, в которых на языке теории категорий строятся модели логических систем. Однако общим недостатком многих из них является то, что построении именно категорных моделей зачастую ничем не мотивировано, а является всего лишь переводом с языка теории множеств на язык теории категорий, что само по себе не столь уж и трудная задача.

В нашем случае приход именно к категорным моделям был закономерным. Мы шли не от синтаксических свойств дедуктивной системы, и не от какой-то уже созданной логической системы, которую необходимо проинтерпретировать, а от семантических отношений между объектами, сопоставленными предложениям языка. Этими объектами оказались функции, внутренняя природа которых вовсе не обязательно является теоретико-множественной. В этой ситуации язык теории категорий оказался наиболее подходящим, так как позволяет говорить о свойствах исследуемых объектов в терминах внешних отношений, в которые они вступают, оставляя открытым вопрос об их внутренней природе. Наша интерпретация отношения альтернативного следования в терминах конкретной категории $\mathbf{Set}{\uparrow}V$ преследовала цель выработки интуиции на примере хорошо всем знакомых теоретико-множественных конструкций, но отнюдь не сводится к ним.

XVI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Успехи человеческой культуры и науки неразрывно связаны с языком и способностью людей к рассуждениям. Язык позволяет вместо реальных объектов использовать их символьное представление, а рассуждения позволяют по определенным правилам оперировать с этими символьными представлениями. Поскольку между знаком и обозначаемым существует разрыв, используемые способы рассуждений должны гарантировать правильность заключений, к которым они приводят. Но что есть правильные рассуждения? Традиционно к ним относят те, которые гарантируют истинность заключения при истинности используемых посылок. На первый взгляд кажется, что такому пониманию нельзя противопоставить ничего более разумного. Но это только на первый взгляд. Если проанализировать исторические корни такого понимания логического следования, то окажется, что в его основе лежат представления Платона о мире вечных идей и убежденность Аристотеля, что рассуждения ограничены лишь теми предложениями, которые говорят о неизменных объектах. Наука же в их понимании – это искусство умозрения.

За прошедшие тысячелетия взгляды на окружающую нас реальность и цели познания претерпели изменения. Мы осознали, что живем в динамически изменяющемся мире, и наука из средства описания превратилась в инструмент действия. При альтернативном подходе к определению логического следования понятие истины уже не играет ключевой роли. Предложениям языка сопоставляются уже не истинностные значения, а функции на предметной области. При этом не фиксируется какое-то конкретное понимание функции. В качестве их могут выступать обычные теоретико-множественные функции, природные процессы, конструирующая деятельность людей и пр.

Первичность понятия функции (процесса, конструкции) позволяет подойти к решению традиционно трудных проблем с другой стороны. Мир перестает состоять лишь из пустоты и атомов, а становится сложной системой взаимодействующих процессов. Чтобы рассуждать об этом мире, требуется другая логика.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анисов А.М.* Современная логика. – М., 2002. – 273 с.
2. *Анисов А.М.* Темпоральный универсум и его познание. – М., 2000. – 208 с.
3. *Аристотель.* Соч.: В 4 т. М, 1975–1983.
4. *Бирюков Б.В., Бирюкова Л.Г., Нуцубидзе Н.Н.* Математика и логика. Проблема соотношения двух наук в истории логико-математической мысли // Закономерности развития современной математики. М., 1987.
5. *Булос Дж., Джеффри Р.* Вычислимость и логика /Пер. с англ. – М.: Мир, 1994. – 396 с.
6. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. – М: Изд. иностр. лит., 1963. 292 с.
7. *Бэкон Ф.* Великое восстановление наук // *Бэкон Ф.* Соч.: В 2 т. Т. 1. М., 1978.
8. *Бэкон Ф.* Новый органон // *Бэкон Ф.* Соч.: В 2 т. Т. 2. М., 1978.
9. *Васюков В.Л.* Категорная логика. – М.: АНО Ин-т логики, 2005. – 194 с.
10. *Вопенка П.* Математика в альтернативной теории множеств /Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 152 с.
11. *Гаек П., Гавранек Т.* Автоматическое образование гипотез: математические основы общей теории. – М.: Наука, 1984.
12. *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики /Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 488 с.
13. *Есенин-Вольпин А.С.* Анализ потенциальной осуществимости // *Есенин-Вольпин А.С.* Философия. Логика. Поэзия. Защита прав человека: Избранное. М., 1999.
14. *Закревский А.Д.* Представление знаний и логический вывод в пространстве многозначных признаков // Логика и компьютер. 2: Логические языки, содержательные рассуждения и методы поиска доказательств. М., 1995.
15. *Кайберг Г.* Вероятность и индуктивная логика. – М.: Прогресс, 1978.
16. *Карпенко А.С.* «Истинностные значения. Что это такое». – Исследования по неклассическим логикам. – М.: Наука, 1989.
17. *Карпенко А.С.* Некоторые алгебры в качестве истинностных значений // Нестандартные семантики неклассических логик: (Тр. науч-

но-исслед. семинара по логике Ин-та философии АН СССР). М., 1986.
18. *Карпенко А.С.* Предмет логики в свете основных тенденций ее развития // Логические исследования. Вып.11. М., 2004.
19. *Карпенко А.С.* Современные исследования в философской логике // Логические исследования. Вып.10. М., 2003.
20. *Карпенко А.С.* Многозначные логики. – М.: Наука, 1997.
21. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности /Пер. с англ.; Под ред., с предисл. и примеч. И.М.Яглома. – М.: Мир, 1984. – 434 с.
22. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. – М., 1974. 120 с.
23. *Крушинский А.А.* Логика древнего Китая: Дис... д-ра филос. наук. – М., 2006.
24. *Марков А.А.* Элементы математической логики /Под ред. А.Г.Драгалина. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984 г. – 80 с.
25. *Мизес Р.* Вероятность и статистика. М.–Л., 1930.
26. Начала Евклида. Книги I–IV /Пер. Мордухай-Болтовского. – М.–Л., 1948.
27. *Платон.* Соч.: В 3 т. – М., 1968–1971.
28. *Поппер К.Р.* Логика научного исследования /Пер. с англ.; Под общ. ред. В.Н.Садовского. – М.: Республика, 2005. – 447 с.
29. *Поппер К.Р.* Предположения и опровержения: Рост научного знания /Пер. с англ. – М.: ООО «Изд-во АСТ»: ЗАО НПП «Ермак», 2004. – 628 с.
30. *Рассел Б.* История западной философии: В 3 кн. 3-е изд., испр. /Подгот. текста В.В.Целищева. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во; Изд-во Новосиб. ун-та, 2001. – 992 с.
31. *Смирнов В.А.* Генетический метод построения научной теории // Философские вопросы современной формальной логики. М., 1962.
32. *Смирнова Е.Д.* Основы логической семантики: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1990. – 144 с.
33. *Стяжкин Н.И.* Формирование математической логики. – М.: Наука, 1967. – 508 с.
34. *Тарский А.* Введение в логику и методологию дедуктивных наук. – Биробиджан: ИП «ТРИВИУМ», 2000.
35. *Тарский А.* О понятии логического следования /Пер. Б.Домбровского. -http://www.is.lviv.ua/~cathyway/library.htm
36. Фрагменты ранних греческих философов. Ч. I. – М.: Наука, 1989.
37. *Хинтикка Я.* Время, истина и познание у Аристотеля и других греческих философов // Логико-эпистемологические исследования. М., 1980.

38. *Хинтикка Я.* «Познание и его объекты у Платона» // Логико-эпистемологические исследования. М., 1980.
39. *Шалак В.И.* Альтернативное определение логического следования // Логические исследования. Вып.13. М., 2006.
40. *Шалак В.И.* Динамическая интерпретация высказываний // Логические исследования. Вып.2. М., 1993 г.
41. *Шалак В.И.* Квантитативное расширение логики // Материалы IX Общерос. науч. конф., С.-Петербург, 22–24 июня 2006 г. СПб., 2006.
42. *Шалак В.И.* Логика альтернативного отношения следования // Логические исследования. Вып.13. М., 2006.
43. *Шалак В.И.* Логика пропозициональных программ и логическое программирование // Тез.: Смирновские чтения, 2 Междунар. конф., Москва 1999 г. М., 1999.
44. *Шалак В.И.* Реляционная интерпретация классической логики высказываний // Тр. научно-исслед. семинара Логического центра Ин-та философии РАН 1999. – М., 2000.
45. *Шалак В.И.* Реляционная интерпретация классической логики высказываний // Тез.: VI Общерос. науч. конф., С.-Петербург, 22–24 июня 2000 г. СПб., 2000.
46. *Шалак В.И.* Теория пропозициональных программ II // Логические исследования. Вып.5. М., 1998 г.
47. *Шалак В.И.* Теория пропозициональных программ // Тр. научно-исслед. семинара логического центра Ин-та философии РАН 1997. М., 1998.
48. *Юшкевич А.П.* Математика и ее история в ретроспективе // Закономерности развития современной математики. М., 1987.
49. *Яновская С.А.* Из истории аксиоматики // Методологические проблемы науки. М., 1972.
50. *Alechina N.* Logic with Probabilistic Operators // Proceedings ACCOLADE'94, 121–138. Amsterdam, 1995.
51. *Boole G.* An Investigation of the Laws of Thought, in which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities. – L.: Walton and Maberley, 1854 (reprint New York: Dover 1958).
52. *Cussens J.* Leibniz and Boole on Logic and Probability. 2002 // http://www-users.cs.york.ac.uk/~jc/research/pub_chron.html
53. *Hacking I.* The emergence of Probability. – Cambridge Univ. Press, 1975.
54. *Hallperin T.* Probability Logic // Notre Dame J. of Formal Logic. 1984. Vol. XXV, № 3.

55. ***Hansen P., Jaumard B.*** Probabilistic Satisfiability // Algorithms for uncertainty and defeasible reasoning, volume 5 of Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems, pages 321–367. Kluwer Academic Publishers, 2001.
56. ***Janes E.T.*** Probability Theory as Logic // Ninth Annual Workshop on Maximum Entropy and Bayesian Methods, Dartmouth College, New Hampshire, August 14, 1989.
57. ***Janes E.T.*** Probability Theory: The Logic of Science. – 2002. http://bayes.wustl.edu/etj/etj.html.
58. ***Leblanc H., Roeper P.*** Indescernibility and Identity in Probability Theory // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1991. Vol. XXXII, № 1.
59. ***Leblanc H., Roeper P.*** On Relativizing Kolmogorov's Absolute Probability Functions // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1989. Vol. XXX.
60. ***Lukasiewicz J.*** A numerical interpretation of the theory of propositions // *Lukasiewicz J.* Selected Works. Amsterdam, 1970. P. 129–130.
61. ***Miller D.*** How Does Probability Theory. Generalize Logic? – http://www2.warwick.ac.uk/fac/soc/philosophy/staff/miller/chuaqui.pdf
62. ***Popper K.*** Two Autonomous Axiom Systems for the Calculus of Probabilities // The British J. for the Philosopy of Science. 1955. Vol. 6.
63. ***Renyi A.*** On a New Axiomatic Theory of Probability // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1955. Vol. 6.
64. ***Tarski A.*** On the Concept of Logical Consequence // *Tarski A.* Logic, Semantics, Metamathematics, Second edition. Indianapolis, 1983. P. 409–420.

Научное издание

Шалак Владимир Иванович

О понятии логического следования

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

Художник *Н.Е. Кожинова*

Технический редактор *Ю.А. Аношина*

Корректура автора

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.98 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 00.00.07.
Формат 60х84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Ньютон.
Усл. печ. л. 8,25. Уч.-изд. л. 4,89. Тираж 500 экз. Заказ № 029.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерный набор автора
Компьютерная верстка *Ю.А. Аношина*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
119991, Москва, Волхонка, 14