Российская Академия Наук
Институт философии

А.М.Анисов

СОВРЕМЕННАЯ ЛОГИКА

Москва
2002

УДК 160
ББК 87.4
А 67

В авторской редакции

Рецензенты:
доктор филос. наук *И.А.Герасимова*,
доктор филос. наук *Е.Е.Ледников*

А 67 **Анисов А.М.** Современная логика. − М., 2002. − 273 с.

Книга является изложением основ логики для гуманитариев. К сожалению, приходится констатировать, что подавляющее большинство многочисленных написанных на русском языке пособий по логике для гуманитариев основное внимание уделяет рассмотрению так называемой традиционной логики, созданной ещё Аристотелем и взлелеянной средневековыми схоластами. Но традиционная логика безнадёжно устарела. В результате образовался недопустимый разрыв между уровнем логической науки, достигнутым в нашей стране, и учебной литературой по логике. Особенностью данной книги является то, что обсуждение логических проблем ведётся с позиций *современной науки*.

Книга адресована всем желающим изучать современную логику, но в первую очередь в ней учтены интересы и запросы студентов, аспирантов и специалистов гуманитарных дисциплин.

ISBN 5-201-02079-8

Введение

Логика – одна из первых наук, появившихся на нашей планете. Она возникла еще в IV веке до нашей эры и, следовательно, логика древнее такой старой мировой религии, как христианство. Несмотря на почтенный возраст, логика сумела не только сохраниться в веках, но и практически непрерывно развивалась, особенно в последние полтора столетия, когда в ней произошли поистине революционные изменения. Что же это за наука, чем она занимается и каково её предназначение? Попытаемся ответить на поставленный вопрос как можно короче и проще, не вдаваясь в тонкости теоретических дискуссий о предмете логики и ее месте в ряду остальных наук.

Существует два основных подхода к трактовке предмета логики. Согласно первому, традиционному подходу, логика является наукой о *мышлении*. Так как мышлением занимается сразу несколько наук (философия, психология, педагогика, психиатрия и др.), то для выделения интересующего логику аспекта мыслительной деятельности обычно добавляют, что логика – это наука о *правильном* мышлении. Но тогда совершающий логические ошибки человек мыслит неправильно. Мыслим мы при помощи особого органа – мозга, находящегося в голове. Так что же, у неправильно мыслящего с головой что-то не в порядке и он должен обратиться к врачу, подобно больным с неправильной осанкой, неправильным пищеварением или иными недугами? Получается, что должен. А поскольку лечением расстроенного мышления занимаются психиатры, обращаться надо именно к ним...

В действительности у совершающего логические ошибки с головой и с мышлением может быть все в порядке и помощь психиатра ему не нужна. Дело в том, что логика никогда не была медицинской дисциплиной, хотя используемая традиционная устаревшая терминология постоянно давала повод к зачислению логики если не в медицинское ведомство, то по крайней мере в ведомство психологии – науки, занимающейся, помимо прочего, систематическим изучением мышления посредством наблюдений и экспериментов. Точка зрения на логику как психологическую дисциплину одно время была популярной и получила название *психологизма*. Психологизм в логике жив и поныне, но эта точка зрения ошибочна уже потому, что реально логика не является, в отличие от психологии, опытной наукой и не пользуется непосредственно такими методами познания, как наблюдение и эксперимент.

Кроме того, чтобы понять определение логики как науки о правильном мышлении, вначале необходимо уяснить, что такое мышление. Однако здесь мы сталкиваемся с проблемой. До сих пор в этом вопросе нет ясности. Более того, представители разных философских взглядов нередко понимают мышление с диаметрально противоположных и потому несовместимых позиций. Например, до сих пор ведутся споры о том, мыслит ли компьютер. Между тем, логика − наука *точная*, в этом смысле она сродни математике. Нельзя ли при определении предмета логики обойтись без ссылок на таинственный и недостаточно изученный феномен мышления?

Второй, современный подход дает утвердительный ответ на последний вопрос. На самом деле логика занимается не исследованием мышления как такового, а теоретическим анализом *рассуждений*. В отличие от понятия мышления, понятие рассуждения почти сразу выводит нас на вполне конкретные явления, знакомые буквально каждому более или менее грамотному человеку. Будем считать, что мы понимаем, что такое предложение (скажем, русского языка). Среди предложений есть такие, которые оцениваются либо как истинные, либо как ложные. Такие предложения называются *высказываниями* (в качестве синонимов к слову «высказывание» будем использовать слова «суждение» и «утверждение»). Например, высказываниями являются предложения «Снег бел», «2×2 = 4», «Все люди смертны», «Снег черен», «2×2 = 5», «Неверно, что все люди смертны» и т.д. Очевидно, что первые три предложения истинны, а последние три ложны. Не все предложения будут высказываниями. Так, предложения «Выйди, любезная нимфа!» и «Который час?» не истинны и не ложны, а потому это не высказывания. Замечательная особенность высказываний состоит в том, что из одних высказываний можно получать, или *выводить* (как предпочитают говорить логики), другие высказывания. Возьмём высказывания «Все люди смертны» и «Все греки люди». Какой вывод напрашивается? Разумеется, отсюда мы выведем высказывание «Все греки смертны». Еще пример. Из высказываний «Если прошел дождь, то тротуары мокрые» и «Дождь прошел» выводится высказывание «Тротуары мокрые». Теперь все готово для определения понятия «рассуждение». *Рассуждение − это выведение высказываний из высказываний.*

Уже из рассмотренных примеров видно, что структура рассуждения включает, во-первых, исходные высказывания, из которых затем что-то выводится. Такие высказывания называются *посылками* (а также *допущениями* или *гипотезами*). В примерах было по две посылки, но количество посылок в рассуждениях в общем случае может быть любым. Во-вторых, имеется выведенное из посылок высказывание, называемое *заключением*. В каждом рассуждении заключение может быть только одно. Наконец, в-третьих, выделяется сам акт перехода от посылок к заключению. Всевозможные акты переходов от посылок к заключению фиксируются логикой в виде наборов *правил логического вывода*. Эти правила играют роль логических законов, которым обязаны подчиняться рассуждения. В устной и письменной речи переход от посылок к заключению происходит с использованием слова «следовательно» или любого другого слова или словосочетания, имеющего сходный смысл:

I

Все кошки любят рыбу. Кеша – кошка.
Следовательно, Кеша любит рыбу;

II

Неверно, что я тебя не уважаю.
Значит, я тебя уважаю;

III

Если я прав, то ты не прав, а если я не прав, то ты прав.
Отсюда с неизбежностью вытекает, *что* один из нас не прав.

Заметим, что в приведенных примерах рассуждений налицо только первые два его структурных элемента – посылки и заключение. Явная ссылка на какое-либо правило логического вывода просто отсутствует. Она заменяется словами «следовательно», «значит», «отсюда с неизбежностью вытекает, что». Данное обстоятельство не случайно. Люди чаще всего используют логику скрытым, интуитивным образом. Иными словами, в повседневной практике рассуждений последние представлены не полностью, а лишь в урезанном виде. Это порождает проблемы. Так, надо полагать, что рассуждение I мгновенно было принято читателем, рассуждение II, возможно, потребовало нескольких мгновений для понимания, а рассуждение III могло кого-то оставить в недоумении – действительно ли из посылки с неизбежностью вытекает предлагаемое заключение? Ведь сами по себе слова про следование или неизбежность никаких гарантий не дают. Рассмотрим рассуждение: «Все кошки смертны. Сократ – смертен. Следовательно, Сократ – кошка». Конечно, это заведомо неправильное рассуждение. Никакого «следовательно» в действительности нет. Но в чем заключается ошибка, чем вообще правильные рассуждения отличаются от неправильных?

Наиболее общий ответ таков: рассуждение является *правильным*, если оно при истинности всех посылок гарантирует истинность заключения. Если же истинность посылок не гарантирует истинности заключения, рассуждение является *неправильным*. Соответствующие гарантии связаны с соблюдением *логических законов*, поэтому без знания логики, эти законы изучающей, нечего надеяться на глубокое понимание рассуждений. Тонкие моменты наиболее сложных рассуждений будут ускользать от вас. Но одно из достоинств логики состоит в том, что даже небольшое продвижение вперед в постижении этой науки быстро приводит к практическим результатам в области составления новых и анализа уже имеющихся рассуждений. В самом деле, в чём, например, ошибка рассуждения о Сократе и кошках? – В том, что из истинных посылок было извлечено заведомо ложное заключение, а такое рассуждение является, по определению, неправильным. Конечно, здесь неправильность видна, что называется, невооруженным глазом, но далее вы убедитесь, что ошибки в рассуждениях могут носить нетривиальный и неочевидный характер, и вскрыть такие ошибки без знания логики не представляется возможным.

Чтобы не допускать логических ошибок, следует как можно больше узнать именно о том, как рассуждать правильно. Логику в первую очередь интересуют правильные рассуждения, подобно тому, как математику интересуют правильные доказательства, а не то, какие ошибки делают в доказательствах изучающие её школьники и студенты. Эти ошибки могут быть интересны психологу, изучающему человеческое мышление, но психология, как уже говорилось, — наука опытная, а не теоретическая, как математика. Современная логика — также наука теоретическая, аналогичная математике. Отсюда итоговое определение предмета логики: *логика — это теоретическая наука о правильных рассуждениях*.

Как это нередко бывает, краткие и вроде бы ясные определения на самом деле требуют комментариев. Так и в нашем случае. Во-первых, предмет логики не исчерпывается исследованием рассуждений. Логика занимается еще, например, анализом основ вычислений и рядом других проблем, и о некоторых из них (но далеко не обо всех) рассказано в этой книге. Однако тема рассуждений — главная и центральная в логической науке. Во-вторых, рассуждения (тем самым и логика как наука о рассуждениях), конечно, имеют отношение к мышлению. Однако это безусловно так только в случае человеческих рассуждений, поскольку проведение рассуждений требует от человека наличия способности мыслить. Соответствующим образом запрограммированный компьютер обладает способностью рассуждать получше многих людей (это просто факт и тут ничего не поделаешь), но извлекать отсюда вывод о его способности мыслить, на наш взгляд, нельзя. Между тем, законы, по которым должны протекать рассуждения, одни и те же и для человека, и для ЭВМ. Поэтому, познавая эти законы, мы, вообще говоря, выходим за рамки описания чисто мыслительных процедур и попадаем в область информационных процессов, которые могут протекать и в отсутствие человеческого сознания.

Выделение рассуждений, а не мыслительных актов, в качестве основы для логического изучения имеет преимущество, связанное с возможностью точной фиксации рассуждений в речи и текстах. Если вы не в состоянии членораздельно произнести или записать ваше рассуждение, — значит, рассуждение фактически отсутствует, его просто не существует. В отношении мышления дело обстоит иначе. Вас могут переполнять мысли, но вы можете не суметь передать их другим. Непосредственно воплотить в произнесенных или записанных словах мысль получается далеко не всегда, что послужило поводом для известной поэтической строки: «Мысль изречённая есть ложь...». Если раньше главным носителем текстовой информации была бумага, а устная речь сохранялась лишь в забывчивой человеческой памяти, то сегодня современная цивилизация изобрела много новых надёжных способов записи речи и текстов на разных физических носителях. Это достижение не только существенно улучшило способы запоминания человеческих рассуждений, но и позволило фиксировать компьютерные рассуждения, сделав их доступными для человека.

Появление рассуждающих машин было бы невозможно без основополагающих результатов современной логики, которым предшествовал длительный путь познания. В своем развитии человечество вначале прошло *дологическую* стадию, когда потребность в рассуждениях была минимальна, затем наступил этап *традиционной* логики, занявший время от создания этой науки древнегреческим философом Аристотелем в IV веке до нашей эры до первой половины XIX столетия и, наконец, со второй половины XIX века и до наших дней продолжается этап *современной* логики. Таким образом, мы выделяем три этапа в развитии логических знаний, включая своеобразную дологическую нулевую стадию, также представляющую интерес для логики. Эта книга посвящена, по преимуществу, изложению идей и подходов, связанных с современным периодом развития логики. Дологическая стадия и традиционная логика рассматриваются лишь в той мере, которая необходима для правильной ориентировки в истории логики. Ведь хотя бы краткая историческая ретроспектива обязательна для гуманитарного познания.

К сожалению, в учебной литературе по логике для гуманитарных специальностей закрепилась весьма сомнительная традиция смешивать в одну кучу обрывочные сведения из современной логики и устаревшие логические теории античности и средневековья, ныне представляющие только исторический интерес. Одна из причин такого положения дел – простота старых логических теорий, не требующих квалифицированной логической подготовки даже от тех, кто берётся писать учебники по логике для гуманитариев. Но есть и другая причина, в силу которой даже квалифицированные авторы, имеющие серьезные логические научные труды, впадают в недопустимое упрощенчество, когда пишут для гуманитариев. Суть в том, что современная логика систематически применяет методы математики (её и называют чаще всего математической логикой!), а по распространенному мнению, гуманитарий испытывает безотчётное и непреодолимое отвращение к математике вообще и к любым формулам в частности. Значит, для гуманитария надо писать попроще, не напрягая и не раздражая его. А как это сделать? Один из путей – излагать устаревший логический материал, благо логики традиционного этапа обходились без математики.

Мы решительно не согласны с таким подходом. Нелюбовь к математике чаще всего обусловлена недостатками школьного образования, когда обучение данной науке нередко превращается в натаскивание в решении задач без понимания смысла всей этой деятельности. Сразу успокоим читателя. Хотя в логике есть абстрактные математические теории, трудные даже для математиков-профессионалов, в своей основе логика остается гуманитарной дисциплиной, составной частью философии, правда, отличаясь от прочих частей философии строгостью и точностью. Для понимания основ современной логики по сути нужна (помимо желания изучать логику) лишь общая культура, которая предполагает и некоторый минимум знаний по математике. Конкретнее, предполагается знание некоторых простейших фактов о свойствах целых чисел (вроде тех, что $2 \times 2 = 4$, что $3 < 8$, что бывают чётные и нечётные целые числа, что среди положительных целых чисел нет наибольшего и т.п.). Да и то это знание понадобится чаще всего лишь для иллюстрации логических построений. В более общем плане требуется понимание идеи переменной величины и умение работать со скобками. Например, если вы понимаете запись вида $(x + y) \times (y - x) = ((z + x) \times z)$, ничего принципиально более сложного вы в этой книге не встретите.

Сказанное только что – не преувеличение. Принципиальная особенность логики состоит в том, что она лежит в основаниях любой научной дисциплины, в том числе и самой философии, и математики. Ведь умение рассуждать неизбежно предшествует получению сколько-нибудь значимых научных результатов. А основания должны быть по возможности просты. Но логика действительно слагается из нескольких относительно простых, но одновременно глубоких и фундаментальных первоначальных идей! В результате логику можно изучать практически с нуля в том смысле, что не требуется какой-то специальной предварительной подготовки. Вместе с тем, мы сомневаемся, что данная книга будет доступна школьникам. Для усвоения логики требуется некоторая интеллектуальная взрослость и общая начитанность, так что даже зрелый человек, успевший позабыть школу, может преуспеть в изучении этой науки. Но в первую очередь данная книга предназначена для студентов и аспирантов гуманитарных специальностей, желающих освоить логику самостоятельно или под руководством преподавателя (если последний разделяет хотя бы в общих чертах высказанные здесь идеи).

Итак, строгость рассуждений роднит логику и математику, в силу чего современную логику нередко рассматривают не только как часть философии, но и как часть математики. Тем более, что многие разделы логики в настоящее время превратились в высокоспециализированные математические дисциплины. Однако математизация логики не отменила её философского и общекультурного статуса как науки о рассуждениях (подобно тому, как математизация физики не вычеркнула физику из числа наук о природе). Просто наша эпоха с ее сложнейшими технологиями, в том числе связанными с обработкой информации, предъявляет повышенные требования к уровню глубины и строгости рассуждений.

Значение и роль логики обусловлены её предметом: логика нужна и важна там, где требуется рассуждать. И чем точнее и труднее рассуждения, тем весомее роль их логической составляющей. Всё здание науки во многом основывается на рассуждениях, поэтому знакомство хотя бы с элементами современной логики обязательно не только для учёных, но и для всех серьезно изучающих научные дисциплины, в том числе гуманитарные. Логика нужна философу и юристу, филологу и историку, экономисту и журналисту, политологу и культурологу. Короче, всем, кому приходится выстраивать сложные рассуждения или вникать в них.

ЧАСТЬ I. ИСТОКИ ЛОГИКИ

ГЛАВА 1. ДОЛОГИЧЕСКОЕ СОЗНАНИЕ

Говоря о дологическом сознании, мы имеем в виду два аспекта отношения логики и сознания. Во-первых, сознание может быть дологическим в смысле отсутствия в его структуре самосознания, основанного на рассуждениях. Это архаическая форма сознания, в точном смысле предшествовавшая появлению логического, поскольку без рассуждений вести речь о какой-либо логике вообще не приходится. Во-вторых, наличие рассуждений как таковых еще не означает, что эти рассуждения протекают по законам логики. Способность наделённого самосознанием разума к рассуждениям обнаруживается до возникновения логических знаний и логической науки, без которых отделение правильных рассуждений от неправильных затруднено или вовсе невозможно.

§1. Бикамеральный разум

Мы склонны представлять людей далёкого прошлого отличающимися от нас манерами, обычаями и одеждой, но совершенно похожими внутренне. В частности, принятие трудных решений или необходимость действовать в новых обстоятельствах мы привычно предваряем рассуждениями, пытаясь рационально оценить ситуацию и заранее избежать ненужных осложнений. Способность к рассуждению кажется нам совершенно естественной и присущей человеку всех времён и народов. Между тем, имеются данные, заставляющие усомниться в этом. Было время, когда рассуждать не умели.

Согласно Джулиану Джейнсу (J. Janes), единство личности возникло в истории человеческого рода на удивление недавно. Он полагает, что сознание современного типа появилось у человека всего лишь около 3 тысяч лет назад, когда распространилась письменность и культура стала более сложной. До того времени человек обладал тем, что Джейнс называет «бикамеральным разумом». Это означает, что два полушария мозга действовали до некоторой степени независимо друг от друга. Так, обычно речь связана с левым полушарием, но на самом деле речь может в какой-то мере генерироваться и правым полушарием, а восприниматься левым. Эту особенность работы мозга люди могли интерпретировать как глас божий или как слова авторитетных лиц – царей, жрецов и родителей.

Джейнс находит указания на бикамеральность разума в «Илиаде» Гомера (возникшей, по-видимому, в 9-8 вв. до н.э.) – эпической поэме о Троянской войне. Персонажи «Илиады» не присаживаются для того, чтобы порассуждать, что им делать. Они не обладают сознательным мышлением в обычном смысле и лишены самоанализа. Нам сейчас нелегко представить, что это такое. Например, когда царь Агамемнон похитил у Ахилла возлюбленную, один из богов схватил Ахилла за его светлые волосы и посоветовал ему не воевать с Агамемноном. Зато другой бог, напротив, заставлял Ахилла обещать, что он вступит в сражение. Мотивы своих требований боги, разумеется, на объясняли. Герою оставалось только без рассуждений выбрать одного из богов и беспрекословно повиноваться его предписанию.

Таким образом, согласно Джейнсу, сигналы, передававшиеся из правого полушария в левое, служили основой для принятия важных решений. Хотя они были связаны с предписаниями данной культуры, но шли из глубин мозга и потому для этих сигналов не существовало объяснения – люди не обладали самоанализом, осознанием своего «я» как источника этих слов. Оставалось верить, что это голоса богов и повиноваться им. Мы можем получить представление о силе этих внутренних голосов, наблюдая поведение шизофреников, которые имеют слуховые галлюцинации и верят, что ими руководят слышимые голоса.

По мнению Джейнса, бикамеральному мышлению пришел конец где-то около 7 в. до н.э. Материальной основой этих изменений послужила необычайная пластичность нервного субстрата сознания, благодаря которой на основе обучения и усвоения культуры, особенно письменной, произошел переход от бикамерального мышления к самосознанию. Однако, как нам представляется, этот переход не был ни всеобщим, ни полным. В сохранившихся до новейшего времени дописьменных культурах вряд ли могли сложиться условия для массового преодоления бикамеральности. Да и вполне грамотные (в смысле умения читать и писать) люди, несмотря на все достижения современной цивилизации, сплошь и рядом демонстрируют рецидивы бикамерального мышления. Тем не менее, остается бесспорным, что способности рассуждать можно научить любого психически здорового человека.

В начале 30-х гг. XX в. в Средней Азии психологи предлагали дехканам следующие логические задачи: (1) «Там, где тепло и влажно, растет хлопок. В кишлаке N тепло и влажно. Растет там хлопок или нет?» и (2) «На крайнем севере все медведи белы. Место N находится на крайнем севере. Белы там медведи или нет?». На первый вопрос люди отвечали правильно, поскольку утвердительный ответ вытекал из их практического опыта. Но с аналогичной второй задачей, выходившей за рамки их жизненного опыта, справлялись уже не все. Некоторые отвечали примерно так: «Я не знаю, какие там медведи. Я там не был. Спросите лучше старика М, он старше меня. Может быть, он знает». Похожие результаты были получены исследователями племени кпелле в Либерии. Вождю племени предложили решить задачу: «Чёрный паук и олень всегда едят вместе. Чёрный паук ест. Что делает чёрный олень?». Вождь дал правильный ответ: «Да, чёрный олень ест», но при обосновании ответа сослался на свой личный опыт: «Чёрный олень весь день ходит по лесу и ест зеленые листья. Потом он немного отдыхает и снова встает, чтобы поесть». Очевидно, что в рассмотренных примерах испытуемые не рассуждали даже в тех случаях, когда ими давались правильные ответы.

Проводившие подобные исследования иногда приходили к выводу о том, что полученные ими данные демонстрируют отсутствие у определенных групп населения способности логически мыслить. Однако создается впечатление, что испытуемые просто не очень понимали, чего от них хотят. Вряд ли окружающая обстановка и образ жизни требовали от них умения выводить из одних высказываний другие высказывания, т.е. умения рассуждать. Так что в любом случае речь должна идти не о дефектах мышления, а о неразвитости культурно обусловленной способности к рассуждениям. Примечательно в этой связи, что представители этих же групп населения более успешно справлялись с логическими задачами, если им до этого удавалось поучиться в школе.

§2. Рецептурная математика

Но школа школе – рознь. Если бы вы обучались в школах Древнего Востока, то никаких навыков рассуждений вы бы не получили. Ведь даже математические знания на Древнем Востоке добывали и обосновывали без строгих рассуждений, т.е. без доказательств! Вместо доказательств учащиеся должны были усваивать разнообразные инструкции по решению математических задач. Это были своего рода рецепты получения ответов, поэтому такую математику и называют рецептурной. Как убедиться, что рецепт правильный, что он ведет к истинному ответу на вопрос задачи? Во многих случаях древневосточные математики ссылались на чувственный опыт, провозглашая принцип: «Гляди, смотри!». В самом деле, можно приводить сколько угодно примеров математических фактов, которые могут показаться очевидными и без доказательств.

Возьмем утверждение о том, что углы при основании равнобедренного треугольника равны. Этот факт непосредственно усматривался из чертежа. Сомневающийся мог провести прямые измерения углов, и чем точнее был построен треугольник и произведены измерения, тем точнее получался ответ. Знаменитая теорема Пифагора (известная школьникам как «Пифагоровы штаны») вовсе не была открыта Пифагором. Задолго до него восточные математики знали о том, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе. Вновь каждый мог убедиться в верности этого утверждения путем прямых построений и измерений.

Сказанное касается не только геометрических фактов, но и арифметических утверждений. Ведь числа древними представлялись наглядно, например, как ряды камешков или наборы геометрических точек. Результат сложения чисел n и m мог быть получен путем подсчета соответствующего числа камешков или точек. Этот метод мог вызвать затруднение при работе с большими числами, но практика обычно не требовала умения работать с числами произвольной величины, а математика на Древнем Востоке была знанием прагматическим, нацеленным на решение практических задач. Умножение выполняли, обращаясь к таблицам умножения. Эти таблицы первоначально составлялись путем последовательных сложений (умножить n на m — это значит сложить число n с самим собой m раз). До сих пор мы пользуемся таблицами чисел, в том числе таблицей умножения, которую усваиваем в школе, заучивая наизусть и принимая на веру, подобно тому, как школьник на Древнем Востоке принимал преподносимые ему математические утверждения без доказательств.

Древневосточному математику с его ориентацией на практические приложения математических знаний было вполне достаточно таких наглядных свидетельств правильности своих построений и вычислений. А сама практическая деятельность древних не требовала от них величайшей точности в расчетах. Например, соотношение между длиной окружности и длиной её диаметра могли принять равным 3,16 (вместо более правильного 3,14). Этого вполне хватало для того, чтобы размесить в ободе колеса 6 спиц. Вопросом о том, каково истинное числовое соотношение между длиной окружности и ее диаметром, не исследовался. Может быть, он просто не приходил в голову древнему математику, поскольку было очевидно, что никакого практического значения подобные вопросы не имеют.

Рецептурная математика отнюдь не канула в лету. До сих пор мы пользуемся многочисленными рецептами решения математических задач, не умея при этом доказательно обосновать правильность своих действий даже в простейших случаях. Многие ли сумеют доказать хотя бы то, что $2\times2 = 4$? С появлением недорогой и доступной электронно-вычислительной техники порой не желают знать и рецепты, так как отныне они введены в вычислительные устройства, и для решения задачи бывает достаточно ввести исходные данные и указать требуемую операцию над ними. Результат принимается на веру, хотя здесь нас могут подстерегать неожиданности. Компьютеры и калькуляторы могут ошибаться! Например, в печати сообщалось об ошибках одной из версий процессора Pentium в операциях с плавающей запятой, которые были обусловлены конструктивными недоработками.

Мы вовсе не хотим сказать, что рецептурное знание не имеет права на существование. Оно со свойственной ему практической направленностью способно сильно облегчить нам жизнь.

Но от этого знание такого рода не перестало быть бездоказательным знанием. Одним из отличительных признаков научного знания является доказательность. Отсюда получается, что рецептурное знание, в частности, рецептурная математика Древнего Востока, науки не образует и наукой не является. Математика стала наукой лишь тогда, когда древние греки открыли идею математического доказательства.

В отказе считать древневосточную математику наукой ничего удивительного нет. В наши дни, например, мы не считаем деятельность программиста разновидностью работы учёного. Программирование чаще всего оказывается разработкой рецептов решения тех или иных задач с помощью ЭВМ, однако правильность самих рецептов (т.е. компьютерных программ) обычно не доказывается. Поэтому, несмотря на то, что построение сложных программ требует развитой способности рассуждать (в отличие от древней восточной математики, не требовавшей рассуждений вообще), программирование – это скорее высокотехнологичное искусство, чем наука. Но есть теоретики программирования, изучающие способы доказательств правильности программ. Такие исследования уже могут претендовать на научный статус. Логика также имеет прямое отношение к теоретическому программированию. Более того, компьютер в своей основе – это логическая машина, способная производить логические операции.

§3. Появление рассуждений

Однако вернемся в древний мир в тот период его развития, когда гомеровские герои уже принадлежали истории. До изобретения компьютеров оставались еще тысячелетия, бикамеральный разум продолжал существовать, но в Греции начинают появляться факты, свидетельствующие о значительных переменах в сознании древних. Показателен пример поэта Архилоха с острова Парос, жившего в середине VII в. до н.э. В отличие от людей прошлых поколений, без рассуждений принимавших устоявшиеся культурные нормы и обычаи, Архилох пытается самостоятельно выстроить свой внутренний мир, переоценивая общепризнанные догмы. В результате его представления о долге и чести оказывается совершенно отличными от тех, которые утверждала поэзия Гомера.

Для гомеровского героя бросить в бою щит — значит навлечь на себя неслыханный позор. Спартанская мать, провожая сына на войну, напутствовала его словами «Со щитом или на щите», т.е. воин обязан либо вернуться живым со щитом, либо его принесут на щите раненым или убитым. В любом случае щит должен быть при нём. Наверное, можно дать объяснение этому суровому обычаю и оценить степень его целесообразности, но человеку с бикамеральным мышлением и в голову не приходило, что можно усомниться в установлениях предков. Иное дело Архолох. Сам опытный воин, он не раз видел, как стремление жить одерживало в реальности верх над древним обычаем, когда воины, спасая себя, бросали тяжелые щиты. И Архилох устами своего лирического героя оправдывает их!

Сам я кончины зато избежал. И пускай пропадает
Щит мой. Не хуже ничуть новый могу я добыть.

Несомненно, перед нами не что иное, как рассуждение, в основе которого лежит неявная посылка о том, что жизнь человека дороже щита, тем более, что щит можно вернуть, а погибшего — нет.

Для поэзии Архилоха вообще характерно устремление к переоценке принятых социальных и культурных ценностей. И на этом поприще нет иного пути, как рассуждение. Вот Архилох говорит о стремлении к посмертной славе, о которой мечтали герои Гомера. Но ведь эта слава призрачна, поскольку никто не вспоминает добром усопших сограждан, и потому что злая участь ожидает умершего в памяти людской (т.е. он будет забыт). Значит, живущему следует искать расположение живущих, а не надеяться на должную оценку потомков. Архилох как человек нам понятен именно потому, что в нем мы видим личность, которая проявляет себя в привычных нам формах переживаний и рассуждений, обходящихся без вмешательства в работу сознания голосов богов или героев.

Культурные процессы, связанные с открытием возможности рассуждать, особенно бурно протекали именно в Древней Греции. Проходит несколько десятилетий, и в следующем VI в. до н.э. здесь появляется философия. Если безраздельно господствовавшие до этого в сознании древних мифология и религия основывались на принимаемых без рассуждений догмах, то философия по самой своей природе критически относится к устоявшимся представлениям и нацелена на выработку аргументированных ответов на вопросы о мире и человеке. Удивительная плодотворность греческой философии нашла свое выражение в том, что едва возникшая философия породила феномен науки, причем в том же судьбоносном для человеческой цивилизации VI в. до н.э. Первой наукой стала математика, причем это была не далекая от настоящей науки рецептурная математика Древнего Востока, а построенная на доказательствах дисциплина.

Возникновение древнегреческой философии и доказательной науки – процесс уникальный как во времени, так и в пространстве. Никогда и нигде больше он не повторился. Правда, философия примерно в то же время появилась в Индии и Китае, но ничего похожего на доказательную науку древняя восточная философия произвести на свет не смогла. Более того, всякий раз, когда в какой-либо цивилизации прошлого историки отмечали использование идеи математического доказательства, обнаруживалось её греческое происхождение. В литературе для обозначения описываемых событий применяется термин «греческое чудо» – редкий пример, когда ученые используют слово «чудо» в положительном смысле.

Математические доказательства древних греков были именно рассуждениями, в ходе которых, отталкиваясь от несомненных (в тогдашних представлениях) высказываний о математических фактах, переходили к столь же несомненным выводам из этих фактов, получая другие математические высказывания. Но «другие» – не значит обязательно новые, дотоле неизвестные. Напротив, первоначальные доказательства применялись к математическим высказываниям, которые были хорошо известны и в Греции, и на Востоке. Зачем же было доказывать то, что не вызывало сомнений и без доказательств? Ответ мы находим в особенностях философии Пифагора, гению которого, по-видимому, человечество и обязано открытию идеи доказательства. Пифагор учил, что в основе всех вещей лежат числа. Значит, изучая числа, мы постигаем, как устроен мир. Отсюда интерес к числам как таковым в пифагореизме. Пифагорейцев интересовали не приблизительные расчеты, достаточные для решения практических задач, а окончательные и непоколебимые истины о числах. Но числа по своей сути это абстракции, поэтому все попытки пифагорейцев представлять числа наглядно к успеху в деле их изучения привести не могли. Поиски способов работы с этими абстрактными объектами и привели в конце концов к открытию метода доказательных рассуждений.

Итак, рассуждения получили мощное развитие в греческой математике, поднявшись до уровня доказательств. Но были еще два важных источника развития рассуждений. Один из них был связан с философией, другой — с тогдашней юридической практикой. Всё это происходило до появления логики, поэтому не будет удивительным, что в древних рассуждениях могли содержаться ошибки. Удивительным может показаться другое. Более сложные математические рассуждения древних греков, как правило, мы признаем и сегодня, тогда как философские рассуждения и рассуждения, выраставшие из юридической практики, нередко оцениваются нами как проблематичные или вовсе неверные. Об этом аспекте рассуждений и пойдет речь в следующем параграфе.

§4. Софизмы и парадоксы

Софистика возникает в Греции во 2-ой половине 5 в. до н.э. В это время в греческих городах-государствах устанавливается демократический способ правления. Аристократия теряет былые политические привилегии, но в целом ей удается сохранить свои богатства. В новых условиях большое значение получают суды, причем каждый свободный гражданин мог вызвать другого гражданина в суд в стремлении возместить действительный или мнимый ущерб. С бедного много не возьмёшь, поэтому опасность быть вызванными в суд в качестве ответчиков угрожала в первую очередь зажиточным слоям населения. В отличие от наших судов, где обвиняют и защищают профессиональные юристы, особенностью древнегреческого судопроизводства была обязанность обвинять и защищаться самому, выступая от себя лично. Поскольку дела решались большим количеством судей при большом стечении народа, мнение которого зачастую играло решающую роль, истцу и ответчику было необходимо убедить собравшихся в своей правоте. Без рассуждений здесь не обойтись, но ведь не каждый владел в должной мере этим искусством. И вот появляются платные учителя красноречия — софисты, готовые научить искусству убеждать любого, кто имеет возможность их нанять.

Почувствуйте разницу: в математике стремились к достижению истины, а в юридическом споре главным было выиграть дело, даже если в действительности ты не прав. Софисты попытались придать разноплановым и взаимоисключающим человеческим интересам одинаковый статус, провозгласив полное их равноправие. Лучше всех эту идею выразил знаменитый софист Протагор, утверждавший: «Человек есть мера всех вещей. Существующих, что они существуют, несуществующих – что они не существуют». Дует один и тот же ветер, но кто-то мерзнет при этом, а кто-то нет. Так разве можно сказать, что ветер холодный или теплый сам по себе? Это очень удобная философия, поскольку позволяет оправдать всё, что угодно. Раз человек есть мера всех вещей, то он выступает и мерилом истины и лжи. Отсюда тезис софистов о том, что каждое высказывание можно с равным успехом как обосновать, так и опровергнуть. Некоторые софисты готовы были доходить до абсурда.

Так, в диалоге Платона «Эвтидем» рассказывается, как два софиста (бывшие учителя фехтования, перешедшие в более выгодный бизнес) запутывают простодушного человека по имени Ктисипп. «Скажи-ка, есть ли у тебя собака?» – «И очень злая», – отвечал Ктисипп. – «А есть ли у нее щенята?» – «Да, тоже злые». – «И их отец, конечно, собака?» – «Да». – «И это собака твоя?» – «Да, конечно». – «Значит, этот пес отец и он твой. Следовательно, твой отец – пес и ты – брат щенят».

Еще один пример. Софизм об «изменяющемся человеке». Согласно этому софизму, взявший взаймы вчера сегодня уже ничего не должен, т.к. он изменился и стал другим; аналогичным образом приглашение на обед ничего не значит: приглашенный вчера на обед сегодня приходит уже непрошеным, т.к. он уже другое лицо. В комедии Эпихарма ситуация с данным софизмом обыгрывается следующим образом. Должник отказывается вернуть долг кредитору, поскольку де с момента получения им ссуды прошло какое-то время, и он стал другим лицом. Не тратя лишних слов, кредитор избивает должника палкой. Вызванный в суд, кредитор прибегает к тому же софизму: избивал не он, а другой человек, поскольку прошло время и он успел измениться и стать другим.

Абсурдность этих софизмов очевидна даже человеку, который не может сказать, в чем конкретно заключается логическая ошибка. Вообще, логически ошибочный ход в рассуждении называется *паралогизмом*. Тогда *софизм* – это сознательно завуалированный паралогизм, рассчитанный на незнание логики. Во времена, когда логики не было, по существу ничего нельзя было противопоставить софистике, что делало актуальной задачу создания логической науки. Однако не только борьба с софистикой стимулировала логическую мысль. Нередко в процессе рассуждений философы, юристы и другие категории людей ненамеренно попадали в сложное положение, выход из которого был не виден. Особую остроту приобретали ситуации, когда с интуитивной точки зрения рассуждение не содержало паралогизмов, однако приводило к неприемлемым выводам. Убедительное рассуждение, приводящее к неприемлемому заключению, называется *парадоксом*.

Характеристики «софизм» и «парадокс» могут употребляться и по отношению к отдельным высказываниям. Высказывание будет софизмом, если оно выглядит как истинное, но в действительности оно ложно. Высказывание будет парадоксом, если оно выглядит как ложное, но в действительности оно истинно. Разумеется, высказывание может не являться ни тем, ни другим, будучи просто либо истинным, либо ложным. Но иногда напрашивается дополнительная оценка высказывания. Например, если политик утверждает, что «Ограничение доступа к негативной информации сбережет нервы людей, которым и так нелегко», то он проявляет трогательную заботу... о себе самом и его высказывание – софизм! Ведь жизнь людям в куда большей степени портят негативные явления в обществе, с которыми призван бороться политический деятель, а не правдивая информация о таких явлениях. Если один из двух близнецов отправился в путешествие с около световой скоростью, а другой близнец остался на Земле, то высказывание «При встрече путешествовавший близнец будет моложе оставшегося на Земле» надо оценить как парадокс (он в книгах по теории относительности так и называется – «парадокс близнецов»).

Перейдем к примерам парадоксальных рассуждений. Однажды древний грек Эвбулид произнес высказывание: «Я лгу». Высказывание как высказывание, и как всякое высказывание, оно является либо истинным, либо ложным. Рассмотрим первую возможность: оно истинно. Но это высказывание утверждает свою собственную ложность, поэтому, если оно истинно, оно должно быть ложным. Это неприемлемо. Остается вторая возможность: оно ложно. Но оно и утверждает свою ложность, в силу чего должно быть признано истинным. Его ложность влечет его истинность, что вновь неприемлемо. В любом случае приходим к неприемлемому результату. Сразу скажем, что никакой логической ошибки в этих рассуждениях нет. Перед нами настоящий парадокс – так называемый парадокс Эвбулида. Существует история об одном человеке, покончившим с собой, будучи не в силах разрешить этот парадокс. Так горячиться не надо, но проблема действительно оказалась сложной и была решена только средствами современной логики.

С древности была известна «дилемма крокодила». Крокодил украл у отца рёбенка, и обещал его вернуть, если отец угадает, вернёт он ребёнка или нет. Неразрешимая дилемма встанет перед крокодилом, если отец скажет, что крокодил ребёнка не вернёт. Действительно, если крокодил начнет возвращать ребёнка, то отец не угадал и возвращать ребёнка нельзя; если же крокодил не будет отдавать ребёнка, то отец угадал и ребенка надо возвращать. Получается, что если крокодил отдаёт ребёнка, то он его не должен отдавать, а если не отдаёт, то должен отдать. Это парадоксально, поскольку условие крокодила представляется вполне разумным, но ведет к неприемлемому результату.

Иногда легко, а иногда совсем не просто отличить правильное рассуждение от софизма или софизм от реальной проблемы, поставленной в форме парадокса. В заключение этого параграфа сформулируем несколько подозрительных высказываний и рассуждений (одно рассуждение не завершено и его предлагается продолжить). Читатель может попытаться сам определить, какие из них являются софизмами, а какие парадоксами.

Софизмы или парадоксы?

1. Если $2 \times 2 = 5$, то Луна сделана из зелёного сыра.

2. Вообще, ложное высказывание влечёт любое. Например, из того, что $2 \times 2 = 5$, следует, что Я – папа Римский.

3. Если x – отец, то x – отец для всех, имеющих отца.

4. Существует такой x, что если он рыдает, то все рыдают.

5. Однажды Протагор учил бесплатно, договорившись, что ученик по имени Эватл заплатит ему, выиграв первое дело в суде. Время шло, но бывший ученик не показывался в судах. Потеряв терпение, Протагор предложил Эватлу заплатить, рассуждая следующим образом. Если я, Протагор, выиграю процесс, то ты заплатишь по решению суда; если же я процесс проиграю, то его выиграешь ты и заплатишь по договору. В любом случае тебе платить. Эватл возразил: если я выиграю процесс, то я не буду платить по решению суда; если же я процесс проиграю, то я не заплачу по договору. В любом случае я тебе ничего не должен.

6. Миссионер попал к людоедам и обнаружил, что угодил как раз к обеду. Ему предлагают произнести одно высказывание с условием, что если оно окажется истинным, его сварят, а если ложным, его зажарят. Миссионер поставил людоедов в безвыходное положение, сказав...

7.Моего подзащитного обвиняют в мошенничестве. Но дело явно носит политический характер. Следовательно, подзащитный в мошенничестве не виновен.

8. «Ты терял что-нибудь?» – «Нет». – «Значит, то, что ты не терял, ты имеешь?» – «Да». – «Но рога ты не терял. Следовательно, ты их имеешь».

9. Уважаемого человека заводят в комнату, где сидит некто, накрытый простыней. «Знаешь ли ты этого человека?», – спрашивают вошедшего, указывая на накрытого. «Нет», – отвечает тот. Простыню сдергивают, а там его брат. «Ты только что солгал, публично заявив, что не знаешь собственного брата»!

10. Эпименид как-то заявил: «Все критяне лгут». Так как сам Эпименид был критянин, сказанное относилось и к нему. Значит, если сказанное им – истина, то он также лжёт и потому его высказывание ложно. Но так быть не может: если высказывание истинно, то оно именно истинно и никак не ложно. Остается признать высказывание Эпименида ложным. Значит, истинным будет высказывание «Существует критянин, который не лжёт».

11. Одни прилагательные обладают тем свойством, на которое указывают, а другие не обладают. Например, прилагательное «русский» само русское, «многосложный» само многосложно и т.д., но прилагательные «французский», «односложный» и т.д. относятся к другому ряду. Назовем прилагательные первого рода автологичными, а второго рода гетерологичными. Рассмотрим прилагательное «гетерологичный». Как и всякое прилагательное, оно само либо автологично, либо гетерологично. Если оно автологично, то должно обладать свойством, на которое указывает, а это гетерологичность. Значит, если оно автологично, то оно гетерологично, что нехорошо. Остается признать его гетерологичным. Но тогда оно обладает тем свойством, на которое указывает и должно быть признано автологичным, и мы попадаем в замкнутый круг.

ГЛАВА 2. ТРАДИЦИОННАЯ ЛОГИКА

В учебной литературе по традиционной логике схема изложения выстраивалась в виде цепочки *понятие—суждение—умозаключение.* Эта схема может показаться очень разумной. Ведь умозаключением в традиционной логике называют (если отвлечься от апелляций к мышлению) выведение из посылок заключения. А это не что иное, как рассуждение. Рассуждение состоит из высказываний. Но высказывание (как мы условились во введении) — это то же самое, что и суждение. Отсюда получается, что рассуждение и, значит, умозаключение также, состоит из суждений. В свою очередь, суждения слагаются из понятий подобно тому, как предложения слагаются из слов. Например, суждение «Собаки — это животные» включает в себя понятия «собаки» и «животные». Значит, чтобы разобраться в умозаключениях, надо прежде исследовать суждения, а для этого вначале требуется уяснить, что такое понятие. Стало быть, необходимо идти от понятий к суждениям, а от них — к умозаключениям. Такой порядок традиционным логикам представлялся незыблемым.

§1. Понятия

Понятием в традиционной логике называют мысль о существенных признаках или, короче, о сущности предмета или предметов. Если вы имеете понятие о человеке, мире, обществе, числах и т.д., значит, вы должны мыслить их существенные признаки. В противном случае у вас нет понятия об этих предметах мысли. Но что надлежит относить к существенному, а что нет? Обычно вразумительный ответ на этот вопрос не дают. В лучшем случае излагается какая-либо философская концепция сущности, не относящаяся напрямую к логике. Что еще хуже, на практике говорят о понятиях до того, как кого-то озарила мысль о сущности. Например, традиционные логики не сомневаются, что слова «человек», «культура», «красота», «мужество» — это именно понятия, хотя далеко не каждый из них осмелится утверждать, что ему известна сущность этих предметов мысли. Но если сущность неизвестна, то нет и мыслей о существенных признаках человека, красоты и т.д. Получается, что и понятий об этих предметах нет. Так почему же заранее уверены, что это именно понятия, а не что либо ещё?

На помощь приходит доктрина так называемого *эссенциализма*. Эссенциализм является неотъемлемой частью учения традиционной логики о понятиях. Согласно доктрине, раз есть понятия, есть и сущности, но эти сущности существуют в понятиях в скрытом виде. У эссенциалистов понятие заранее неявным образом заключает в себе сущность мыслимых в понятии предметов. Например, мы наперёд знаем, что «человек» – это понятие. Стало быть, в этом понятии содержатся существенные признаки людей, хотя эти признаки скрыты от нас. Скрыты навсегда? – Отнюдь нет. Сущность мыслимых в понятиях предметов раскрывается в *определениях* используемых понятий. Отсюда ясно, почему традиционная логика, в отличие от современной, придает фундаментальное значение изолированным определениям понятий. Есть какое-либо отдельное важное понятие? – Значит, надо заняться поисками его определения, которые завершатся лишь в случае вскрытия сущности этого понятия.

Проблема, однако, в том, что почти все основные понятия за рамками точных наук имеют несколько определений, которые к тому же сплошь и рядом плохо стыкуются между собой, а то и вовсе исключают друг друга. Для эссенциалиста наличие множества определений одного и того же понятия указывает на нерешённую проблему. Например, усвоивший азы традиционной логики аспирант, желая посвятить диссертацию анализу феномена культуры, формулирует проблему примерно так: «Существует несколько сотен определений понятия культура, но ни одно из них нельзя признать удовлетворительным». Не может быть, в самом деле, чтобы в одном понятии прятались различные сущности. Следовательно, нужно найти единственное «истинное» определение понятия, схватывающее только ему присущее. Если определений много, то сущность понятия не раскрыта и проблема остается.

Архаическая традиционно-логическая доктрина эссенциализма, возникшая еще в античности и развитая схоластической философией средневековья, имеет на удивление много сторонников среди современных специалистов в области философских, социальных и гуманитарных наук, чаще всего не осознающих свое идейное родство с этой замшелой теорией. Идут не от **дела**, а от **слова**: что такое *общество*, что такое *человек*, что такое *личность*, что такое *история*, что такое *ценность*...? Поистине, бесконечный список вопросов. Получается, что самое легкое в науке – это поставить проблему. Для этого даже не нужно быть учёным. Спросил же Понтий Пилат: «Что есть *истина*?». А вот отвечать на вопросы должны профессионалы, компетентность которых не вызывает сомнений. Но кого считать профессионалом? Ведь на практике перечисленные и многие другие используемые в науке слова понимаются и определяются настолько различно, что ни о какой согласованной позиции и речи быть не может. Напротив, точки зрения разных авторов зачастую оказываются логически несовместимыми. Кто же из исследователей прав? Так как сущность каждого понятия единственна, то либо кто-то один эту сущность нашел, а все остальные нет, либо никто не знает, что она такое. В лучшем случае некоторые определения лишь неполностью и односторонне схватывают ускользающую от исследователей сущность.

Рассмотрим в качестве примера понятие «человек». Платону принадлежит определение: «Человек – это двуногое беспёрое». Один из учеников Платона бросил к ногам учителя ощипанного цыпленка со словами: «Вот, Платон, твой человек». Подумав, мыслитель изменил свое определение: «Человек – это двуногое беспёрое по природе». Но еще один ученик Платона, – создатель логики Аристотель, – определил иначе: «Человек – это политическое животное». Указывать в определении на то, что человек – животное, вошло в обычай (быть может, таким образом нас учат скромности). «Человек – это разумное животное», «Человек – это символическое животное», «Человек – это животное с мягкой мочкой уха»... Короче говоря, определений много. Так какое же из них ухватывает существенные признаки человека? Утверждают, что последнее из приведенных определений, будучи формально правильным (других животных с мягкой мочкой уха вроде бы нет), опирается на несущественный признак и потому должно быть отброшено. Допустим, беспёрость также не столь существенна. Но как быть с остальными определениями? Разве можно сказать, что признаки «разумное», «политическое», «символическое» несущественны? А что если объединить их в одно определение: «Человек – это разумно-политическое символическое животное»? – Получилось как-то плохо. Тем более, что не все существенные признаки здесь учтены. Как быть, например, с признаком «общественное» и определением «Человек – это общественное животное»?

Наша ирония оправдана, ибо традиционные логики не замечают, что при последовательном проведении установок доктрины эссенциализма неизбежен вывод о том, что с ростом научного знания мы все дальше оказываемся от постижения сущности. В самом деле, появление очередного исследователя-эссенциалиста приводит к новым определениям понятий, так что никогда количество определений не уменьшается. Напротив, оно растет как снежный ком. Ввиду несогласованности или даже несовместимости различных определений одного и того же понятия увеличение их числа свидетельствует об отходе от таинственной истинной сущности понятия. Получается, что чем больше работают эссенциалисты, тем скромнее их достижения и тем меньше оснований считать их компетентными специалистами. В процессе исследований проблема не только не решается, а, наоборот, усугубляется. Пытаясь познать сущность, эссенциалисты всё дальше уходят от нее. В пределе сущность без остатка растворится в сонме определений. Этот финал можно назвать *логическим самоубийством эссенциализма*.

Эссенциалистское учение традиционной логики о понятии не только безнадёжно устарело, но и мистифицирует проблему понятия через утверждение идеи о его якобы скрытой сущности. Само понятие «понятия» оказалось запятнанным, у него дурная логическая репутация. По-видимому, это одна из причин, почему в учебниках по математической логике слово «понятие» предпочитают не употреблять вообще! В действительности проблема понятий в современной логике никуда не исчезла, скрывшись под другими именованиями. Мы не намерены отказываться от привычного термина «понятие», отдавая его на откуп изжившим себя воззрениям, и в дальнейшем вернемся к проблеме понятия с точки зрения современной логики.

§2. Суждения

Единого учения о суждении традиционной логикой создано не было. Более или менее сходятся в том, что суждения бывают простыми и сложными. *Простые* суждения не содержат в себе других суждений, в то время как *сложные* суждения состоят из простых. Структура простых суждений, по утверждению традиционных логиков, содержит не менее трёх (у некоторых авторов больше) элементов: субъект, предикат и связку. *Субъект* — это те предметы, о которых идет речь в суждении. *Предикат* – это признаки, которые суждение приписывает субъекту. *Связка* соединяет субъект и предикат, образуя целостное суждение. Например, в суждении «Сократ является человеком» субъектом будет термин «Сократ», предикатом будет термин «человек», а связкой будет термин «является». В суждениях «Жучка есть собака» и «Человек суть разумное животное» субъектом, предикатом и связкой будут, соответственно, термины «Жучка» и «человек», «собака» и «разумное животное», «есть» и «суть». В качестве связки вместо слов «является», «есть», «суть» и им подобных часто используется тире: «Сократ – человек», «Жучка – собака» и т.д.

Разные авторы приводят различные классификации суждений, причем эти классификации проводятся на неясных основаниях и нелегко понять, почему выделены те или иные типы суждений. Так, иногда выделяют *суждения существования*, в которых идет речь о существовании предметов в действительности. Примерами таких суждений будут «Существуют люди», «Существуют звёзды», «Существуют чётные числа» и т.п. Помимо непреодолимых для традиционной логики трудностей, обусловленных проблемой, в каком смысле чётные числа могут существовать в действительности (в том же смысле, что и звёзды, или в том же смысле, что и крылатые кони, или ещё в каком-то смысле?), имеются проблемы со структурой таких высказываний. Где здесь субъект, где предикат, а где связка? Некоторые традиционные логики утверждают, что это бессубъектные суждения, другие – что беспредикатные, третьи – что эти суждения имеют разные субъекты, но единый предикат «существуют», так что в итоге они принимают стандартный трехэлементный вид: «Люди – существуют», «Звёзды – существуют», «Чётные числа – существуют».

К сожалению, нельзя одновременно утверждать, что каждое суждение имеет субъект, предикат и связку, и что некоторые суждения могут не иметь субъектно-предикатной структуры. Так что первые две точки зрения приходится отбросить. Что же касается третьей точки зрения, то она не лучше предыдущих. Дело в том, что во всех традиционных классификациях суждений выделяют так называемые *категорические* суждения, имеющие вид «S – P», где «S» субъект, «P» предикат, а «–» связка. Получается, что суждения существования являются разновидностью категорических суждений, и потому их не только не нужно, но и ошибочно выделять в самостоятельную разновидность наряду с категорическими суждениями.

В качестве самостоятельного типа суждений в традиционной логике признают суждения с *отношениями*: «Иван старше Петра», «Москва больше Санкт-Петербурга», «4 < 5» и т.д. Очень хорошие суждения, но попробуйте найти в них связку! Может быть, связка пропущена, как в предложении «Сократ человек»? Коль скоро так, то её можно восстановить (ясно, что «Сократ человек» восстанавливается до «Сократ — человек»). Но куда поместить связку в суждении об отношении? «Иван старше — Петра», «Иван старше Петра —», «— Иван старше Петра» — все эти варианты явно нехороши. Остаётся последняя надежда: «Иван — старше Петра». Допустим. Но тогда перед нами обычное категорическое суждение вида S — P, где субъектом выступает термин «Иван», а предикатом признак «старше Петра». Вновь приходим к той же ошибке, что и в предыдущем случае: выделить новый тип суждений не удалось. Вообще, традиционная логика не только не справилась с проблемой суждений с отношениями, но даже не сумела эту проблему правильно поставить.

Суждениям с отношениями традиционная логика противопоставляет суждения о свойствах или *атрибутивные* суждения. Например, суждение «Сократ — человек» атрибутивно, поскольку в нём предмету «Сократ» приписывается свойство «человек». На деле атрибутивные суждения оказываются, таким образом, уже хорошо знакомыми нам категорическими суждениями, ибо имеют всё ту же структуру S — P, где в качестве предиката P выступает некоторое свойство предметов.

Можно было бы ещё очень долго блуждать в лабиринте традиционно логического учения о суждении. Но оставим это бесплодное занятие. Поставим вопрос иначе: есть ли в традиционной доктрине суждений рациональное зерно? С некоторыми (правда, весьма существенными) оговорками можно ответить утвердительно. Традиционной логике удалось построить пусть нестрогую, но более или менее приемлемую теорию категорических суждений. Недаром, как мы только что видели, к этим суждениям так или иначе сворачивается обсуждение вопросов о суждениях и их разновидностях.

Как уже говорилось, категорические суждения имеют структуру S — P. Но точнее будет сказать, что структура суждений этого типа может быть либо S — P, либо S не — P. Ведь можно не только утверждать связь между субъектом и предикатом суждения, но и отрицать эту связь («Сократ не является собакой», «Жучка не есть человек» и т.п.). В зависимости от того, утверждается или отрицается связь между субъектом и предикатом, категорические суждения делятся на *утвердительные* и *отрицательные*. Это деление называют делением по *качеству* суждений. Далее, в категорическом суждении речь может идти о всех предметах из S, о некоторых предметах из S, или об одном предмете S: «Все люди – смертны», «Некоторые люди – долгожители», «Сократ – смертен»). Соответственно мы имеем *общие*, *частные* и *единичные* категорические суждения. Это деление будет делением суждений по *количеству*.

Сразу скажем, что с единичными суждениями в традиционной логике не все благополучно. Оказалось, что в традиционные рассуждения о всех или о некоторых предметах *из* S не вписываются рассуждения *о самом* S. Основатель логики Аристотель это чувствовал и, не возражая против единичных суждений как таковых, предпочитал не использовать их в рассуждениях. Почему это так – в общих чертах будет объяснено ниже при изложении современной логики, которая успешно разрешила проблему единичных суждений. Сейчас оставим единичные высказывания в стороне, сосредоточившись на категорических суждениях оставшихся видов.

Объединяя качественные и количественные (за исключением единичных) характеристики, получаем следующие четыре разновидности категорических суждений, которым присвоим буквенные обозначения A, E, I, O.

A: Все S – P (*общеутвердительные*),
E: Ни одно S не – P (*общеотрицательные*),
I: Некоторые S – P (*частноутвердительные*),
O: Некоторые S не – P (*частноотрицательные*).

Именно с суждениями этих четырех типов могли, хотя и не без проблем, справляться традиционные логики.

До сих пор обсуждались суждения, считавшиеся в традиционной логике простыми. Что касается сложных или составных суждений, то теории таких высказываний в традиционной логике не было. Имелись лишь разрозненные правила работы с некоторыми видами сложных суждений. Тем не менее, сложные суждения приобретали в рамках логической традиции особое значение в связи с проблемой *логических законов*. Традиционная логика претендовала на открытие четырёх основных законов мышления.

Первый закон – закон *тождества*. Его выражали по-разному, но суть сводилась к утверждению суждений вида «S есть (то же самое) S», где в качестве S разрешалось брать либо понятие, либо суждение. В первом случае получали простое суждение, например, «человек есть человек», во втором – сложное суждение, например, ««люди смертны» есть то же самое «люди смертны»». Обычная трактовка этого закона заключается в требовании вкладывать в одно и то же понятие или суждение одинаковый смысл при каждом появлении этого понятия или суждения в выводе. Если вначале рассуждения вы приняли, что человек – это животное, то в конце рассуждения вы не должны утверждать, что человек выпал из животного царства, как это получилось у Ф.Ницше, который уверял: «Человек есть животное, переставшее быть животным. Стало быть, человек перестал быть человеком». Ницше здесь явно попирает закон тождества, отрицая, что человек есть человек и никак не может перестать быть таковым.

Сказанное может показаться самоочевидным и бесспорным, если забыть о том, что традиционная логика полагала, что устанавливает законы мышления. Как же Ницше умудрился мыслить, нарушая закон мышления, и что это вообще за закон, если с ним можно не считаться? Да и всегда ли верно, что в мышлении должен соблюдаться принцип S есть S? Если вы впервые изучаете логику, то к моменту, когда вы добрались до данного текста, вы о логике знаете уже несколько больше, чем в начале. Ваше понимание логики изменилось. Но тогда в каком смысле мышление следует закону тождества, если этот закон требует, чтобы мысль «логика» оставалась тождественной самой себе?

Пусть S какое-либо суждение. Одновременное утверждение и отрицание S даёт противоречивое суждение «S и не S». Говорят ещё, что суждение «S и не S» является *противоречием*, и что «S» и «не S» являются *противоречащими* суждениями. Второй закон традиционной логики – закон *непротиворечия* (чаще для краткости называемый законом противоречия, что не является образцом логически последовательного введения названий, поскольку закон запрещает противоречия, а не разрешает их). Закон формулируется просто: *неверно, что S и не S*. Его суть заключается в том, что нельзя одновременно что-либо утверждать и это же самое отрицать. Например, если S есть суждение «$2\times2 = 4$», то запрет противоречия даёт «Неверно, что $2\times2 = 4$ и $2\times2 \neq 4$». Ещё одна формулировка закона непротиворечия гласит: *из двух противоречащих суждений одно непременно ложно*. Если мы согласны утверждать истину и не согласны утверждать ложь, то одна формулировка интуитивно[1] влечёт другую, и наоборот. Действительно, предположим, что суждение «неверно, что S и не S» истинно.

Тогда «S и не S» ложно и, следовательно, ложно либо «S», либо «не S». Допустим теперь, что либо «S», либо «не S» ложно. Тогда ложно и суждение «S и не S», а его отрицание «неверно, что S и не S» истинно.

Сторонники так называемой диалектической логики уверяли, что помимо вредных противоречий, вроде одновременного утверждения $2{\times}2 = 4$ и $2{\times}2 \neq 4$, есть ещё плодотворные противоречия. Например, Гегель (а вслед за ним многие другие диалектики) полагал, что противоречивое суждение «Стрела летит и не летит» решает парадоксы движения, поскольку движение есть диалектическое единство изменения («летит») и покоя («не летит»). К сожалению, как отличить вредные противоречия от плодотворных, диалектическое учение не объясняет. Как бы там ни было, диалектика не признаёт закон запрета противоречия фундаментальным законом мышления. Более того, диалектики утверждают, что мышление по своей природе – противоречивый процесс, и чем более оно правильное, тем более глубокие противоречия в нём возникают.

Диалектическое учение отличается крайней размытостью понятий и аморфностью способов рассуждений, благодаря чему познавательный конфликт между сторонниками и противниками традиционного логического подхода к противоречиям во многом теряет остроту. В конце концов, традиционный логик может не без оснований сказать, что диалектическое мышление есть пример неправильного мышления. Положение осложняется в случае третьего закона мышления – закона *исключённого третьего*. Формулировка вновь проста: *S или не S*, т.е. либо верно S, либо верно не S, а третьего не дано. Например, «Снег бел или неверно, что снег бел», «Либо тараканы симпатичны, либо тараканы не симпатичны» и т.д. Ещё одна формулировка закона исключённого третьего такова: *из двух противоречащих суждений одно непременно истинно*. Вновь одна формулировка интуитивно[2] влечёт другую, и наоборот. Если истинно, что «S или не S», то либо «S» истинно, либо «не S» истинно. Если же либо «S» истинно, либо «не S» истинно, то истинно суждение «S или не S».

К прискорбию для традиционной логики, в сфере точнейшей из наук, – в математике, – возникло мощное движение конструктивизма, отрицающее применимость закона исключённого третьего в рассуждениях. Это вам уже не иррационалист Ницше или мистифицирующие мышление диалектики, которых можно заподозрить в непонимании логики. Здесь удар нанесён в самое сердце традиционных представлений о предмете логической науки. Ни один сколько-нибудь сведущий человек не станет утверждать, что конструктивисты неправильно рассуждают или неверно мыслят. Напротив, рассуждения конструктивистов и сам стиль их мышления удивительно изощрённы и трудны даже для математиков, ими получены тонкие и глубокие математические результаты. Однако при этом законом исключённого третьего они не пользуются! Представьте себе, что мы игнорируем закон всемирного тяготения. Он быстро напомнит о себе, если мы попытаемся спланировать без парашюта с крыши многоэтажного дома. Так что же это за законы мышления, которые можно игнорировать, не только оставаясь в рамках научного дискурса, но и продвигая науку вперёд?

Ответ уже был дан раньше. Логика не является наукой о мышлении и о его законах. Это наука о рассуждениях. Пример конструктивистов показывает, что система рассуждений не единственна, что могут быть разные системы рассуждений. Тощему набору из четырёх законов (четвёртым является так называемый закон *достаточного основания*, который носит вне логический характер[3]) традиционной логики современная логическая наука противопоставляет логические теории, содержащие бесконечное число законов о рассуждениях. Разные логические теории предлагают разные наборы таких законов, так что мы можем выбирать наиболее подходящие для успешного познания способов рассуждений.

§3. Умозаключения

Единственная завершённая теория рассуждений (называемых *умозаключениями*) традиционной логики была способна оперировать, причём не всегда удачно, лишь категорическими суждениями. В этой теории различают *непосредственные* и *опосредованные* умозаключения. В непосредственном умозаключении вывод делается из одной посылки. Опосредованные умозаключения сводятся к *силлогизмам*, в которых заключение выводится из двух посылок. Некоторые традиционные логики не считают выводы из одной посылки умозаключениями (что довольно странно), полагая, что в «настоящем» умозаключении число посылок должно быть не менее двух.

В качестве основных форм непосредственных умозаключений приводят следующие три: превращение, обращение и противопоставление предикату.

Превращение есть получение суждения, равносильного исходному, но противоположного по качеству. Превращение суждений типов A, E, I и O выглядит так:

1. Все S есть P *превращается в* Ни одно S не есть не-P;
2. Ни одно S не есть P *превращается в* Все S есть не-P;
3. Некоторые S есть P *превращается в* Некоторые S не есть не-P;
4. Некоторые S не есть P *превращается в* Некоторые S есть не-P.

Можно превращать и единичные суждения. Например, «Сократ есть человек» превращается в «Сократ не есть не человек». Общеотрицательное «Ни один маньяк не есть хороший человек» благополучно превращается в общеутвердительное «Всякий маньяк есть не хороший человек». Попробуем превратить суждение «Ни один зверь не есть хороший человек». Это истина, поскольку звери вообще не люди (хорошие или плохие — безразлично). Но отсюда получим «Всякий зверь есть не хороший человек». Заключение и непонятно, и нелепо.

Обращение меняет местами субъект и предикат исходного суждения. Например, суждение типа A обращается следующим образом: из «Все S — P» получаем «Некоторые P — S». Так, из «Все студенты — люди» получаем «Некоторые люди — студенты». Но обращение истинного «Все вечные двигатели — двигатели» даёт ложное «Некоторые двигатели — вечные двигатели». Если кто-то с последним примером не согласен и, допустим, считает заключение «Некоторые двигатели — вечные двигатели» истинным, то пусть он приведёт конкретный пример некоторого вечного двигателя в подтверждение своей позиции. Что касается посылки «Все вечные двигатели — двигатели», то сомневаться в её истинности — всё равно, что сомневаться в истинности высказывания «Все белые лошади — лошади». Правда, был один древний китайский философ по имени Гунсунь Лун, который утверждал, что белая лошадь не есть лошадь, но этим он изумил даже своих современников, не говоря уже о современниках наших.

Противопоставлением предикату называется вывод суждения, субъектом которого является понятие, противоречащее предикату исходного суждения, а предикатом — субъект исходного суждения. Например, из суждения «Всякая кража есть наказуемое деяние» противопоставлением предикату можно получить суждение «Ни одно не наказуемое деяние не есть кража». На самом деле выделять выводы посредством противопоставления предикату в отдельный тип непосредственных умозаключений не корректно, поскольку такие выводы сводятся к операциям превращения и обращения. Применим сначала превращение к рассматриваемому примеру исходного суждения. Получим «Ни одна кража не есть не наказуемое деяние». Затем обратим последнее суждение: «Ни одно не наказуемое деяние не есть кража». Как видим, получили то, что требуется и без применения преобразования посредством противопоставления предикату. Почему это преобразование выделили в отдельный вид — непонятно. Не выделяем же мы операцию ((a × b) + c) в отдельный вид наряду с умножением и сложением. Но суть даже не в этом. Раз при противопоставлении предикату мы пользуемся превращением и обращением, то все приведённые выше несуразицы с этими операциями остаются в силе и для выводов противопоставлением предикату.

Перейдём к традиционному учению о силлогизмах — *силлогистике*. Силлогизмом будет, например, следующее рассуждение.

(а)

Каждый человек — смертен.
Сократ — человек.
Следовательно, Сократ — смертен.

Это, несомненно, правильное рассуждение, гарантирующее при истинности посылок *Каждый человек — смертен* и *Сократ — человек* истинность заключения *Сократ — смертен*. Рассмотрим другое рассуждение, которое традиционные логики часто приводят как пример правильного силлогизма, но которое увы, в действительности не будет правильным.

(б)

Все люди — смертны.
Сократ — человек.
Следовательно, Сократ — смертен.

Возможно, кто-то негодующе воскликнет: «Это не другой пример, а то же самое рассуждение. Ведь вторая посылка и заключения в них просто совпадают, а что касается первой посылки, то сказать «*Каждый человек смертен*» и «*Все люди смертны*» —

это одно и то же. И раз рассуждение (а) автор признал правильным, он должен признать правильным и рассуждение (б)!». Но обратимся к третьему примеру.

(в)

Все кошки — смертны.
Сократ — человек.
Следовательно, Сократ смертен.

Интуитивно очевидно, что информация о смертности кошек и факт принадлежности Сократа к человеческому роду никак не связаны между собой, в силу чего рассуждение (в) никак нельзя признать правильным. Однако *структура* рассуждений (б) и (в) совершенно одинакова и имеет вид

(б, в)

Все S — P
C — D
Следовательно, C — P

Такая структура *не гарантирует* истинности заключения при истинности посылок. Например, из *Все сирены — прекрасны* и *Сократ — добр* (если согласиться, что это истины) никак не вытекает, что *Сократ — прекрасен* (ибо Сократ был некрасив). Кажущаяся правильность умозаключения (б) основана на дополнительной посылке, которая не была сформулирована явно. С интуитивной точки зрения, вести речь о человеке или говорить о людях — это одно и то же. Поэтому интуитивно нам умозаключение (б) кажется правильным. Но логика не должна полагаться на интуицию, и в логически правильном рассуждении все посылки должны быть явными. В противном случае никаких гарантий правильности дать нельзя. Представьте себе, что кто-то полагает, что термины «человек» и «люди» не тождественны. С логических позиций возразить будет нечего: два разных термина не обязаны иметь одинаковое значение. Другое дело, если бы кто-то усомнился, что человек есть человек или что люди это люди. Одинаковые термины, как требует закон тождества, будут иметь одинаковое значение.

Напротив, структура силлогизма (а) такова, что при любых посылках, если они окажутся истинными, заключение также будет истинным:

$$\text{(a}'\text{)}$$

Каждое M − P
S − M
Следовательно, S − P.

Между посылками структуры (a′), в отличие от структуры (б, в), имеется связь через термин *M*, который входит в каждую из посылок, что делает неизбежным заключение о связи между терминами *S* и *P*: из *Каждое M есть P* и *S есть M* следует, что *S есть P*.

В каждом правильном силлогизме имеется такой термин-посредник, который устанавливает связь между посылками, обеспечивая необходимость заключения. В самом заключении этого термина уже нет: мавр сделал свое дело и может уйти. Термин, входящий в обе посылки и отсутствующий в заключении, называется *средним* термином силлогизма. Оставшиеся два термина называются *крайними*. Крайний термин, являющийся субъектом заключения, называется *меньшим*, а крайний термин, являющийся предикатом заключения, называется *большим*. Чтобы привести силлогизмы к некоторому стандартному виду, условимся раз и навсегда первой посылкой считать ту, которая содержит больший термин. Тогда вторая посылка будет содержать меньший термин. Будем обозначать средний термин буквой *M*, меньший – буквой *S* и больший – буквой *P*.

Средний термин может по-разному располагаться в посылках. Всего имеется четыре возможности: *M* является субъектом первой посылки и предикатом второй, *M* является предикатом в каждой из посылок, *M* является субъектом в каждой из посылок и, наконец, *M* является предикатом первой посылки и субъектом второй. Эти четыре возможности расположения среднего термина позволяют выделить четыре *фигуры* силлогизмов.

1 *фигура*	2 *фигура*	3 *фигура*	4 *фигура*
M − P	*P − M*	*M − P*	*P − M*
S − M	*S − M*	*M − S*	*M − S*

В каждой из фигур заключение имеет стандартный вид *S − P*. Заметим, что пока качество и количество посылок и заключения не принималось в расчёт. Но если явно учесть качественные и количественные характеристики посылок и заключения какой-либо фигуры, то получим, по определению, *модус* этой фигуры. Сколько модусов имеется у каждой фигуры? – Если разрешить в качестве посылок и заключения брать только суждения четырёх стандартных типов A, E, I и O, то легко сосчитать: четыре возможности для первой посылки, четыре для второй и четыре для заключения, что даёт $4 \times 4 \times 4 = 64$. Например, первая посылка может быть типа E, вторая – типа I, заключение – типа O и т.д. – всего 64 комбинации. В итоге для всех четырех фигур получается $64 \times 4 = 256$ модусов.

Рассмотрим следующие силлогизмы.

(1)

Все люди – разумные животные.
Все студенты – люди.
Следовательно, все студенты – разумные животные.

(2)

Ни одна кошка не является собакой.
Некоторые звери – собаки.
Следовательно, некоторые звери не являются кошками.

(3)

Некоторые зайцы не являются храбрыми.
Все зайцы – грызуны.
Следовательно, некоторые грызуны не являются храбрыми.

(4)

Все студенты – учащиеся.
Все учащиеся – люди.
Следовательно, некоторые люди – студенты.

Расположение среднего термина показывает, что силлогизм (1) есть модус фигуры 1, (2) – модус фигуры 2, (3) – модус фигуры 3 и (4) – модус фигуры 4. Каждый из приведённых силлогизмов 1-4 не вызывает сомнений в своей правильности, так что перед нами – правильные модусы соответствующих фигур. Но модусы могут быть и неправильными. Например, если вы замените в (1)-(4) заключения на суждения, противоположные по количеству и качеству, то получите неверные модусы, в которых из истинности посылок истинность заключения не следует.

Может получиться так, что из посылок вообще невозможно вывести заключения. Так, на основании истинных посылок «Ни один преступник не является законопослушным» и «Некоторые преступники не являются наркоманами» ничего определённого о соотношении наркоманов и законопослушных сказать нельзя. Эти посылки не дают необходимой информации для получения однозначного заключения. Представьте себе, что в законодательстве одной страны употребление наркотиков без медицинских показаний считается правонарушением, а в другой стране не считается. Аналогичным образом, из двух частных утвердительных суждений «Некоторые люди – гении» и «Некоторые люди – помешанные» не следует никакого вывода о связи понятий «гениальность» и «помешанность».

Нам нет необходимости перебирать все случаи неправильных модусов. Ведь их гораздо больше, чем правильных. Поэтому легче перечислить все правильные модусы соответствующих фигур, исчерпав тем самым все случаи правильных структур силлогизмов. В средние века придумали для облегчения запоминания правильных модусов следующий стишок:

Barbara, Celarent, Darii, Ferioque prioris;
Cesare, Camestres, Festino, Baroko, secundae;
Tertia Darapti, Disamis, Datisi, Felapton,
Bokardo, Ferison habet: Quarta insuper addit
Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison.

Названия модусов в нём начинаются с заглавной буквы, причем первые три гласные в названиях модусов указывают, какими должны быть посылки и заключения.

Модусами первой фигуры являются Barbara, Celarent, Darii, Ferio. В модусе Barbara все три гласные – «а», отсюда обе посылки и заключение должны быть общеутвердительными суждениями типа А: ААА. Силлогизм (1) есть пример умозаключения по модусу Barbara. В модусе Celarent последовательность гласных «еае» указывает, что первая посылка общеотрицательна (типа Е), вторая общеутвердительна (типа А), а заключение общеотрицательно (вновь тип Е): ЕАЕ. Модусы Darii, Ferio дают, соответственно, последовательности «aii» и «eio», т.е. AII и EIO.

Зная модус, т.е. зная размещение среднего термина, а также качественные и количественные характеристики посылок и заключения, нетрудно построить конкретное рассуждение по этому модусу. Построим умозаключение по модусу Celarent. Первая посылка может быть любым общеотрицательным суждением. Например, возьмём суждение «Ни один вор не честен». Вторая посылка общеутвердительна, однако в её выборе мы уже ограничены: поскольку взят модус первой фигуры, термин «вор» должен быть предикатом второй посылки, так что остаётся лишь свобода выбора субъекта. Выберем в качестве субъекта второй посылки термин «карманник». Получим суждение «Все карманники — воры». Как только предъявлены соответствующие правильному модусу посылки, вариант заключения выбирать уже не надо: он автоматически вытекает из посылок. Модус Celarent имеет общеотрицательное заключение, причём в нашем примере его субъектом будет субъект второй посылки «карманник», а предикатом — предикат первой посылки «честен», что даёт заключение «Ни один карманник не честен»:

Ни один вор не честен.
Все карманники — воры.
Следовательно, ни один карманник не честен.

Перечислим модусы трёх оставшихся фигур. *Модусы второй фигуры*: Cesare, Camestres, Festino, Baroko (силлогизм (2) соответствует модусу Festino). *Модусы третьей фигуры*: Darapti, Disamis, Datisi, Felapton, Bokardo, Ferison (силлогизм (3) соответствует модусу Bokardo). *Модусы четвёртой фигуры*: Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison (силлогизм (4) соответствует модусу Bramantip). В качестве упражнения попробуйте построить конкретные примеры на все перечисленные выше модусы каждой из четырёх фигур.

Всего, таким образом, набралось 19 правильных модусов. Стало быть, оставшиеся 237 модусов неправильны? В руководствах по традиционной логике ответа вы, скорее всего, не найдёте. Что гораздо хуже, некоторые из «правильных» модусов традиционной логики нельзя считать правильными с современной точки зрения. Спросим, какое из двух суждений истинно: суждение «Ни одно животное не изрыгает пламя» или суждение «Некоторые животные изрыгают пламя»? Надо полагать, здравомыслящие люди сочтут первое суждение истинным, а второе — ложным. Но вот следующее умозаключение (принадлежащее Б.Расселу). Предварительно напомним, что такое химера. Химера — это изрыгающее пламя животное с головой льва, туловищем козла и хвостом змеи.

Все химеры — изрыгают пламя.
Все химеры — животные.
Следовательно, некоторые животные — изрыгают пламя.

Из определения вытекает, что суждения *Все химеры — изрыгают пламя* и *Все химеры — животные* истинны. Однако вы можете до бесконечности ловить самых разных животных, но так и не доберётесь до такого, которое бы изрыгало пламя, что подтверждает правильность первоначальной оценки: суждение «Некоторые животные изрыгают пламя» ложно. Но из истинных посылок выводить ложное заключение нельзя. Между тем, рассуждение протекало по модусу третьей фигуры Darapti, который традиционной логикой признаётся правильным!

Другой пример рассуждения по третьей фигуре, который традиционной логикой должен быть признан правильным.

Ни один вечный двигатель не съедобен.

Все вечные двигатели — объекты, нарушающие законы природы.

Следовательно, некоторые объекты, нарушающие законы природы, не съедобны.

Вновь посылки истинны, а заключение ложно (ведь никто не сможет оспорить, что ни среди съедобных, ни среди не съедобных объектов нет таких, которые нарушали бы законы природы). И это несмотря на то, что умозаключение построено по принимаемому традиционной логикой в качестве правильного модусу Felapton!

Возникает ещё один вопрос: почему при выделении модусов фигур не учитывались единичные суждения? В силлогизме (а) единичное суждение «Сократ — человек» было успешно использовано. Силлогистика только выиграет от использования сплошь и рядом встречающихся в практике рассуждений единичных высказываний. На самом деле традиционная силлогистика не сумела справиться с единичными суждениями. Рассмотрим два умозаключения.

(г)

Греки — индоевропейцы.
Сократ — грек.
Следовательно, Сократ — это индоевропеец.

(г′)

Греки — народ.
Сократ — грек.
Следовательно, Сократ — это народ.

Умозаключение (г) ведёт нас от истинных посылок к истине, в то время как имеющее ту же структуру умозаключение (г′) из истинных посылок извлекает ложное заключение. Традиционные логики в этих вопросах за столетия своего существования так и не разобрались.

Подведём итоги. Традиционная логика дала человечеству первый пример теории рассуждений и в этом состоит её значение. Но эта теория имела существенные изъяны, выражавшиеся в многочисленных неточностях, излишнем доверии к интуиции, наивном эссенциализме или даже в прямых ошибках. Ныне традиционная логика представляет лишь исторический интерес. Её можно и нужно изучать, но только вооружившись мощным аппаратом логики современной[4]. Использование традиционной логики в современных условиях сродни использованию астрологии и алхимии вместо астрономии и химии. Безнадёжно устаревшая традиционная логика была изгнана из логической науки, но сумела уцелеть, перекочевав в учебники для гуманитариев. Обрывочные сведения о современной логике вперемешку с традиционными материалами, содержащиеся в этих учебниках, лишь запутывают учащихся и тормозят развитие логического образования в гуманитарной сфере.

ЧАСТЬ II. ОСНОВЫ ЛОГИКИ

Последовательность изложения современной логики отличается от схемы, принятой в логике традиционной, когда соблюдается последовательность *понятия – суждения – умозаключения*. После предварительных разъяснений мы начнём с высказываний (т.е. с суждений), затем построим теорию рассуждений (умозаключений, по старому) для высказываний. На следующем этапе рассмотрим проблему понятий и после этого вернёмся к анализу высказываний с учётом их понятийной структуры, что позволит построить более мощную и адекватную реальным задачам теорию рассуждений. Схема, грубо говоря, имеет следующий вид: *высказывания – рассуждения – понятия – рассуждения′*. Таков общий план второй части.

ГЛАВА 3. ЗНАКИ И ЗНАКОВЫЕ СИСТЕМЫ

Современная логика – одна из наук о знаках. Это не противоречит тому, что логика определяется как наука о рассуждениях, т.к. рассуждения с этой точки зрения представляют из себя соединения знаков, и, чем сложнее рассуждения, тем сложнее их знаковая структура. Логика занимается не любыми знаками, а лишь теми, которые важны для рассуждений. Чтобы добраться до таких знаков, сначала надо разобраться в природе знаков вообще и установить, какие виды знаков встречаются.

§1. Что такое знак?

Не будет преувеличением сказать, что без знаков человеческая культура и цивилизация были бы невозможны. Знаки лежат в основаниях познавательной деятельности, обеспечивают коммуникацию и общение между людьми, служат средством фиксации и накопления знаний. Знаки знакомы всем и каждому, но не легко определить, что же такое знак. Это общая ситуация – обычно чем более фундаментальным является понятие, тем труднее его определить. В данном случае мы ограничимся пояснениями и примерами, уповая на то, что сама способность читать и понимать этот текст свидетельствует об умении обращаться со знаками – ведь текст состоит из знаков!

Знак – это физический объект, который указывает на другой объект. Или: *знак* – это материальный предмет, замещающий другой предмет. Можно было бы привести и другие поясняющие определения, но суть в том, что знаки способны нести информацию о вещах, которые по тем или иным причинам скрыты от нас. Возьмём в качестве первого примера знаков *дорожные указатели*. Это физические объекты, их можно видеть, при большом желании потрогать и т.д. Но их свойства как материальных, физических объектов для участников дорожного движения сами по себе интереса не представляют. Точнее, они важны лишь в отношении их способности донести до нас информацию о тех объектах, к которым отсылают указатели. Если нам нужно попасть в пункт *A*, то увидев табличку с указанием поворота на *A*, мы не станем думать, что табличка и есть пункт *A*. До *A*, быть может, ещё много километров пути. Табличка в этом случае выступает в роли знака, указывающего на *A*.

А что, если пункта *A* не существует? Представим, что на дороге встретился указатель на город Китеж. Повернув на Китеж, мы никогда туда не доберёмся, ибо этот фантастический город существует лишь в воображении людей. В такой ситуации не выполнена основная функция знака – указывать на другой объект. Стало быть, табличка с указанием поворота на Китеж знаком не является. Чтобы назвать какой-то предмет знаком, мы должны не только располагать самим этим предметом, но и иметь уверенность в том, что этот предмет указывает на другой существующий предмет.

Объект, на который указывает знак, называется *денотатом* этого знака. Говорят ещё, что знак обозначает денотат, замещает денотат, представляет денотат и т.п. Как без денотата знак з

$\downarrow$

д

перестаёт быть знаком, так и денотат без знака перестаёт быть денотатом. Назвать какую-либо вещь денотатом – значит подразумевать, что имеется её знак, т.е. имеется обозначающая её другая вещь. Иными словами, знаковая ситуация в обязательном порядке предполагает наличие как минимум трёх вещей: двух объектов и связывающего их отношения обозначения (или указания). Графически это можно представить следующей простой схемой. Связь между знаком и денотатом представлена стрелкой. Если убрать стрелку, то получим два изолированных объекта, уже не находящихся в отношении обозначающего (знака) и обозначаемого (денотата). Стрелка показывает, что знак обозначает денотат. К сожалению, схема не способна адекватно передать существенные нюансы знаковой ситуации. Идея знака носит абстрактный характер и потому должна постигаться в понятиях, а не в наглядных образах.

Вернёмся к данным выше определениям знака. Там чётко сказано, что знак обязан быть материальным, т.е. физическим объектом. Не вдаваясь в вопрос, что такое материальный или физический объект, ограничимся следующей его характеристикой: объект физически существует, если он находится где-нибудь в реальном пространстве. Ныне живущие люди и животные, океаны и материки, элементарные частицы и волны, звёзды и целые галактики занимают место в пространстве, располагаются в какой-либо его области. Значит, это материальные, физические объекты. Но, исходив реальное пространство вдоль и поперёк, мы нигде не встретим идеальную математическую сферу, не споткнёмся о лежащее на дороге число, не пожмём руку понятию о человеке... Можно ли на этом основании утверждать, что идеальные фигуры, числа и понятия не существуют? – Да, они не существуют как физические, материальные вещи. Тем не менее они существуют, но в другом качестве. Может быть, это прозвучит для кого-то странно, но универсум существующего не исчерпывается вещами, существующими физически. Существовать могут и некоторые нефизические объекты. Тому, кто думает иначе и не готов изменить свою позицию, лучше оставить занятия логикой, ибо современная логика без всякой мистики (как мы это увидим в дальнейшем) принципиально признаёт нематериальное существование наряду с физическим.

Чтобы вести речь об отсутствующих в данный момент времени и в данном месте пространства вещах, или, тем более, рассуждать о физически несуществующих объектах, мы нуждаемся в их физических представителях – знаках. Попробуйте передать кому-то, о чём вы думаете. Как это сделать? – Ведь мысль не материальна! Одним из сохранившихся до наших дней суеверий является вера в телепатию. Суеверия суевериями, но на практике самый горячий приверженец телепатии будет общаться не телепатемами, а с помощью физических представителей мыслей – знаков. С помощью знаков общаются не только телепаты, но и животные, передающие таким образом информацию друг другу.

Мы утверждаем, что Сократ – учитель Платона, а Платон – учитель создателя логики Аристотеля. Но ни Сократа, ни Платона, ни Аристотеля уже нет среди живущих людей. Как физические объекты они уже не существуют. Но физически существуют знаки, на них указывающие, а также знаки, которые зафиксировали высказанные ими мысли и идеи, хотя с тех пор прошло более двух тысяч лет. Материальные следы прошлых событий – это знаки этих событий. Учёные, используя знаки прошлого, рассуждают о причинах вымирания динозавров, хотя эти существа исчезли с лица Земли миллионы лет назад. Знаки, таким образом, хранят память о прошлом.

Если вдуматься, ещё более удивительна способность материальных знаков обозначать объекты, которые не только не материальны, но и не являются мыслями какого-то конкретного человека. Числа, например, – это не мысли Васи или Пети. Они существуют независимо от того, думаем мы о них сейчас, или нет. Такие объекты называют идеальными. При всей загадочности идеальных объектов (спор об их природе далёк от завершения), в науке научились успешно работать с ними, используя их физические представители – знаки. Так, идеальные числа представлены материальными цифрами. Цифры – это знаки чисел, а не сами числа. Цифра «4» – это не число четыре, а его знак. Денотат цифры, – само число как таковое, – невозможно предъявить в наглядной форме. Пифагорейцы, неудачно пытавшиеся наглядно изображать числа, вынуждены были перейти к знакам чисел, чтобы рассуждать о них.

Итак, денотаты знаков могут иметь разную природу и даже не обязаны быть материальными объектами и существовать физически. Но чтобы рассуждать о таких объектах, необходимо использовать обозначающие их материальные предметы – знаки.

§2. Виды знаков

Классифицировать знаки можно по-разному. Обратимся к вышеприведённой схеме. На схеме имеется три объекта: знак, стрелка (отношение обозначения) и денотат. Если положить в основание классификации сами знаки, то надо будет учитывать их физические характеристики. Однако для логики не столь важно, является ли знак следами мела на доске, чернил в тетради, колебаниями воздуха при произнесении слов, набором светящихся точек на экране или чем-нибудь ещё. Значит, остаётся два пути: выделить виды стрелок (т.е. виды обозначения) или указать типы денотатов. Используем обе эти возможности поочерёдно.

Какие виды связи между знаком и денотатом существуют, что может скрываться за стрелкой схемы?

Во-первых, *причинная* связь. Однако знак не может быть физической причиной денотата. Сам язык противится такому толкованию связи. Фразы типа «Огонь является знаком дыма», «Удар по оконному стеклу является знаком осколков», «Воспаление является знаком повышенной температуры» и т.п., — режут слух. Не попробовать ли наоборот? — Получается гораздо лучше: «Дым — знак появления огня», «Осколки оконного стекла — знак удара по нему», «Повышенная температура — знак воспаления» и т.д. Следовательно, речь должна идти о противоположной ситуации, когда денотат выступает в качестве физической причины знака. Тогда стрелка ведёт от следствия к причине: наблюдая следствие (знак), мы делаем вывод о его причине (денотат). Почувствовав дым, мы заключаем, что где-то горит. Дым для нас — знак огня. Увидев разбитое оконное стекло, мы понимаем, что по нему ударили. Осколки тогда — знак удара. Знаки в этом случае называются *знаками-индексами* или просто *индексами*. Дым — знак-индекс огня, осколки стекла — знак-индекс удара, повышенная температура — знак-индекс воспалительного процесса, желтизна кожных покровов (желтуха) — знак-индекс заболевания печени, гром — знак-индекс молнии и т.д. Окружающий мир переполнен знаками-индексами.

Во-вторых, знаки могут обладать *структурным сходством* с денотатом. Такие знаки называются *иконическими*. Например, фотография человека — иконический знак того, кто на этой фотографии изображён, реалистический портрет — тоже иконический знак. Но портрет абстракциониста, скорее всего, не будет иконическим знаком из-за возможного отсутствия структурного сходства между изображением и оригиналом. Дорожные знаки зачастую являются иконическими. Если впереди нас ожидает крутой поворот налево, то соответствующий дорожный знак, заранее предупреждая об этом, будет содержать загибающуюся влево чёрную полосу. Эта полоса и будет иконическим знаком участка дороги, на которую она указывает. Было бы прямым вредительством обозначать левый поворот повёрнутой вправо полосой. Но красный знак светофора ничего общего не имеет с требованием остановиться, поэтому это не иконический знак. Роль иконических знаков в последнее время возрастает в связи с развитием графических компьютерных интерфейсов. По ярлыкам программ, находящиеся на экране компьютера, можно судить о том, что делает эта программа. Игра в шахматы, скорее всего, будет представлена иконическим знаком, изображающим участок клетчатой доски и какую-либо шахматную фигуру, иконический знак редактора текстов может изображать пишущую руку и т.п.

В-третьих, особо приходится выделять случай, когда *никакой физической или структурной связи между знаком и денотатом нет*. Сколько бы вы ни всматривались в знак «выхухоль», вы не сможете по самому этому знаку определить, что за ним скрывается. Другое дело, что вы можете знать, что сопоставляется этому знаку, но это знание, повторим, не заключено ни в самом знаке как физическом объекте, ни в его физических связях, ни в его структурных характеристиках. Все знают, что такое корова. Но знак «корова» ни в малейшей степени не напоминает это симпатичное жвачное животное. Однако отсутствие физической или структурной связи между знаком и денотатом не означает, что вообще никакой связи нет. В разбираемом случае такая связь имеется. Определённая группа людей условилась, договорилась о том, что будут обозначать слова «выхухоль», «корова» и им подобные, тем самым превратив эти слова в знаки. Иными словами, использование упомянутых материальных слов в качестве знаков является результатом *конвенции* между людьми. Конвенциальные знаки называются *знаками-символами* или просто *символами*. Таким образом, *символ* – это знак, который конвенциально указывает на денотат.

Разделение знаков по типу связи знака и денотата на индексы, иконические знаки и символы восходит к Ч.С.Пирсу. При всей важности индексов и иконических знаков, наибольшее значение в жизни людей имеют знаки-символы. Логика в рамках своего предмета занимается только знаками-символами, так что о символах стоит рассказать подробнее.

Символы находятся в случайной связи со своими денотатами, тогда как индексы и иконические знаки в той или иной мере обусловлены их денотатами. В случае индексов эта обусловленность приобретает характер необходимости: денотат как причина неизбежно вызывает следствие как знак этой причины. Обусловленность иконических знаков носит более мягкий характер, но всё равно имеются объективные (т.е. не зависящие от субъекта) границы сходства, за пределами которых знаки, теряя сходство с денотатами, перестают быть иконическими знаками. В результате только на уровне знаков-символов мы обретаем свободу выбирать любые обозначения денотатов, какими бы эти денотаты ни были.

Знаки-индексы никакой свободы выбора не оставляют. Наличие знака-индекса непременно предполагает физическое присутствие денотата в окрестности индекса, поблизости от него. Далеко развести в пространстве или во времени индекс и его денотат невозможно, они физически соседствуют друг с другом. Перемещение денотата вызывает и перемещение индексирующего его знака. Конечно, эти доводы предполагают определённое понимание каузальной, т.е. причинной связи. Идущая от Д.Юма трактовка каузальности, разделяемая многими учёными, требует смежности (близкого соседства) причины и следствия как в пространстве, так и во времени. В этом есть резон. В противном случае не избежать чрезмерно расширительного употребления термина «причинность» и, как следствие, термина «знак-индекс». Если, скажем, считать родителей причиной появления детей, то при таком бытовом понимании причинности дети окажутся знаками-индексами родителей, потомки – индексами их предков, а если предками людей являются обезьяны, то люди тогда – это знаки-индексы обезьян. Всё это неестественно.

Иконические знаки обладают большей гибкостью и уже не требуют, чтобы их денотат находился где-то рядом или даже физически существовал. Например, наша фотография может находиться в любом месте, независимо от того, куда мы отправились. А фотографии или кадры хроники остаются иконическими знаками изображённых на них людей и в том случае, когда этих людей физически уже нет. Отсюда, кстати говоря, вытекает, что всякого рода поиски или лечение людей по их фотографиям – шарлатанство. Сколько ни всматривайся в фотографию незнакомого человека, по этой информации принципиально невозможно определить, жив ли он, не говоря уже о его поиске или лечении. Всё же гибкость иконических знаков ограничена. Абстрактные денотаты, не допускающие наглядного изображения, недоступны для иконических знаков. Ведь из соответствующего определения вытекает, что их денотат либо физически существует или существовал, либо наглядно существует или существовал в воображении конкретного человека. Представьте, что перед нами реалистический по виду портрет. Если в действительности портрет выдуман, то его оригинал существовал в воображении художника.

Знаки-символы ни физически, ни структурно никак не зависят от денотатов, благодаря чему обретают предельно возможную гибкость. Открытие знаков-символов – достижение поистине эволюционного масштаба. Среди всех видов живущих или живших на Земле существ лишь человек в полной мере овладел искусством манипулирования знаками-символами. Знаками-индексами пользуются многие биологические виды, а некоторые из высших видов животных обнаруживают способность распознавать иконические знаки (например, орангутаны и шимпанзе могут узнавать себя в зеркале, т.е. способны установить связь между своим иконическим изображением и собственной персоной). Но систематически оперировать символами в естественной среде обитания животные не умеют. Люди могут научить их использовать отдельные символы или простейшие группы символов, что очень забавно и любопытно – и только. Лишь человек является, по определению Э.Кассирера, символическим животным.

По-настоящему мощь знаков-символов обнаружилась тогда, когда появились абстрактные денотаты, принципиально недоступные ни для индексов, ни для иконических знаков. Рассуждения об абстрактных объектах привели к возникновению науки, а феномен науки обусловил, в конечном счёте, особенности современной цивилизации с её техникой и технологиями. Вся человеческая культура носит, по преимуществу, символический характер. Мы живём в мире символов и настолько свыклись с ними, что требуется усилие, чтобы посмотреть на них со стороны.

А это необходимо сделать. Ведь зачастую прогресс в одном отношении оборачивается потерями в другом. Оборотная, тёмная сторона имеется и в нашем случае. Во-первых, это *трудности общения*, обусловленные наличием в мире сотен различных языков. Язык одного народа может быть совершенно непонятен языку другого народа, даже если эти народы живут по соседству и хотят общаться между собой. Почему? – По той причине, что современные языки, как и почти всё в нашей культуре, носят символический характер, т.е. в их основе лежит конвенция, известная носителям языка и не известная большинству остальных людей. Разговор между русским и китайцем, например, будет затруднён или вовсе невозможен, даже если эти два человека имеют одну и ту же специальность и сходные взгляды на жизнь. Другое дело, если живущие в сходных условиях люди общаются при помощи индексов или иконических знаков. Перевода тут не требуется. Два охотника превосходно поймут друг друга без слов, ибо они пользуются одинаковыми индексами. Сличение фотографии на паспорте и предъявившего паспорт не требует знания языков. К сожалению, посредством индексов и иконических знаков мало что можно передать, и мы снова и снова вынуждены решать проблему перевода с одного языка на другой.

Во-вторых, что гораздо хуже, символический характер языков открывает широкую дорогу *лжи*. Индексы и иконические знаки также могут вводить в заблуждение, но в целом для данных видов знаков это не характерно. Явление мимикрии, когда незащищённое животное пытается походить на защищённое или несъедобное, – тому пример. Или, скажем, портрет может приукрашивать оригинал, но до определённых пределов. Если художник перестарается, сходство может оказаться утраченным, и тогда портрет перестанет быть иконическим знаком реального человека. Символы же позволяют не только приукрашивать или очернять людей, вещи и события, но и создавать вымышленные персонажи, выдуманные ситуации, описания несуществующих явлений.

Логика оперирует знаками-символами и является одним из мощных орудий борьбы за истину. Современную логику недаром называют *символической логикой*, подчёркивая роль символов в её проблематике. Некоторые основные виды интересующих логику знаков-символов будут рассмотрены в дальнейшем. Так, уже известное читателю понятие «высказывание» можно переопределить следующим образом: **высказывание** – *это знак, денотатом которого является либо истина, либо ложь.* Поскольку истина и ложь – это абстракции, которые невозможно представить наглядно, постольку их знаками могут быть только знаки-символы. Значит, высказывания – это знаки-символы. Символическая логика не может избавить нас от лжи, однако она способна ограничить её распространение через рассуждения. Если посылки рассуждения истины и мы рассуждаем по законам логики, то наши выводы также окажутся истинными. Без логики нет никаких гарантий, что из истинных посылок не будет выведена ложь.

§3. Естественные и искусственные языки

Язык – это система знаков, т.е. не просто случайный набор каких-то знаков, а совокупность знаков, находящихся между собой в определённых отношениях. *Естественные* языки (русский, английский, китайский, язык дельфинов, воронов и т.д.) складывались стихийно исторически в ходе общения людей или животных. *Искусственные* языки (эсперанто, язык дорожных знаков, языки программирования, логические языки и т.д.), напротив, являются результатом целенаправленной деятельности человека по созданию знаковых систем.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только символических естественных и искусственных языков, поскольку именно они представляют интерес для логики.

Любой язык можно рассмотреть с трёх сторон. Во-первых, это синтаксис языка. *Синтаксис* задаёт правила построения и сочленения знаков как физических объектов. Написать «карова» – значит допустить синтаксическую ошибку в построении знака. Правильным построением будет «корова». В предложении «На лугу паслись корова» все знаки построены правильно, но их сочетание ошибочно. Синтаксические правила русского языка требуют здесь вместо «корова» писать «коровы». Все говорящие на русском как на родном языке более или менее знакомы с синтаксисом русского языка, даже если его синтаксические правила не изучались или испарились из памяти. Синтаксис иностранных естественных языков или искусственных языков в обязательном порядке приходится изучать специально.

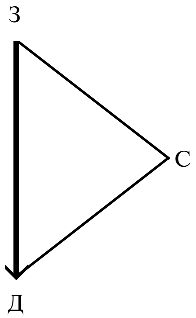
Во-вторых, это семантика языка. *Семантика* рассматривает знаки с точки зрения того, что и как эти знаки обозначают. Рассмотренное выше разделение знаков на знаки-индексы, иконические знаки и знаки-символы носит семантический характер, поскольку опирается на разбор отношений между знаком и его *значением*, т.е. денотатом. Семантический анализ языка, как мы увидим, не исчерпывается указанием знака на денотат. Важны ещё способы указания, так как один и тот же денотат можно обозначить по-разному, вкладывая в обозначение разный *смысл*.

В-третьих, ещё имеется прагматический аспект языка. *Прагматика* занимается вопросами практического использования языка. Логика как теоретическая дисциплина больше сосредоточена на изучении синтаксиса и семантики искусственных логических языков, оставляя проблемы прагматики в стороне. Тем не менее, когда мы будем давать рекомендации по решению задач перевода с естественного языка на язык логики, по применению логики для построения прикладных теорий или будем иллюстрировать абстрактные логические конструкции примерами на естественном языке, мы окажемся в сфере прагматики, т.е. в сфере практического использования логики.

Неотъемлемой особенностью символических естественных языков является своеобразная неопределённость их синтаксиса и семантики. Имеются в виду не исключения из правил, которые можно зафиксировать и запомнить, а принципиальная невозможность сказать заранее, какие синтаксические конструкции будут обладать значением и смыслом, а какие не будут.

Лингвист Н.Хомский разрабатывал правила, позволяющие автоматически (например, при помощи компьютера) получать синтаксически правильные фразы естественного (английского) языка. В числе фраз было истинное высказывание «Интересные новые идеи рождаются редко». Но по тем же правилам было получено предложение «Бесцветные зелёные идеи спят яростно». По виду это предложение является высказыванием, которое нечто утверждает. Истинно утверждает или нет? Ясно, что нет. Тогда это предложение ложно? Тоже нет, поскольку в противном случае истинным окажется его отрицание «Неверно, что бесцветные зелёные идеи спят яростно». Но в чём здесь смысл? В том, что бесцветные зелёные идеи не спят яростно, или что они не зелёные, или что спят не яростно, или что-нибудь подобное? − Ясно, что все перечисленные варианты неприемлемы. Остаётся признать, что и предложение «Бесцветные зелёные идеи спят яростно», и его отрицание *бессмысленны*. У этих предложений нет ни денотата «истинно», ни денотата «ложь» и потому они не являются высказываниями, хотя синтаксически они правильны и очень похожи на высказывания.

Рассмотрим предложение «Нынешний король Франции лыс». В отличие от предыдущего случая, это предложение вполне осмысленно, к тому же по смыслу перед нами высказывание. Высказывания же, по определению, любо истины, либо ложны. Но нынешнего короля Франции не существует, ибо ныне Франция − республика. Стало быть нельзя ни утверждать, ни отрицать, что несуществующий король лыс, или что он не лыс. Поэтому опять здесь нет ни денотата «истинно», ни денотата «ложь». Получается, что рассматриваемое похожее на высказывание и синтаксически правильное предложение имеет смысл, но не имеет денотата.



Сложившаяся ситуация заставляет пересмотреть выше приведённую схему знака. Наряду с денотатом знака есть ещё такая семантическая компонента, как *смысл* знака. Знак указывает на денотат, однако смысл указания может быть разным. В результате получается схема *семантического треугольника*, точнее отражающая природу знаков-символов. Как вытекает из только что разобранных примеров, синтаксически правильное выражение естественного языка может не иметь ни смысла, ни денотата, либо иметь смысл, но не иметь денотата. Это, несомненно, недостаток естественного языка. Применяя его синтаксические правила, мы надеемся получать знаки. Однако синтаксическая конструкция, лишённая денотата, – это вообще не знак, даже если конструкция синтаксически правильная.

Семантические компоненты знака назовём *семантическим значением* или просто *значением*. Можно говорить о *денотационном значении* знака и о его *смысловом значении*. В этой терминологии, предложение «Бесцветные зелёные идеи спят яростно» вообще лишено семантического значения, тогда как предложение «Нынешний король Франции лыс» имеет смысловое значение, но лишено денотационного значения. В любом случае перед нами не знаки. Ведь знаки, как мы видели, обязаны иметь денотационное значение. Иначе знаками чего они являются? Похожие на знаки безденотатные синтаксические конструкции не могут быть знаками по самой сути понятия «знак».

А что, если конструкция синтаксически неправильна, может ли она иметь денотат и смысл? Разумно предположить, что нет. Однако на практике мы, встретив слова «карова» или «ындюх» догадываемся, как их исправить, восстанавливая тем самым пошатнувшуюся семантику знаков. Но раз знаем, как исправлять, значит, приведённые слова не перестали быть знаками, несмотря на их вопиющую синтаксическую неправильность! Более того, даже в бессмысленных на первый взгляд выражениях, которые и поправить уже нельзя, могут встречаться своего рода осколки смысла. Отечественный лингвист Л.В.Щерба предложил следующую фразу русского языка, состоящую из несуществующих в русском языке слов: «Глокая куздра штеко будланула бокра и кудрячит бокрёнка». Казалось бы, смысл полностью утрачен, однако в действительности кое-что осталось! Так, на вопрос о том, является ли бокр одушевленным существом, имеется точный ответ: да, является. И не потому, что у бокра есть бокрёнок (ведь и у пня есть опёнок), а потому, что куздра будланула не что – бокр, а кого – бокра. Заменив в предложении Щербы «бокра» на «бокр», мы превратим одушевлённое в неодушевлённое, но не превратим его конструкцию в знак. Здесь смысл подобен улыбке Чеширского кота, который сам то и дело исчезал, но его улыбка какое-то время висела в воздухе.

Как было сказано вначале, языки являются системами знаков. Знаки в языках можно сочетать, соединять или связывать друг с другом по каким-либо правилам. В частности, высказывания (если это действительно высказывания, а не лишённые денотационного значения выражения) разрешается соединять так называемыми *логическими союзами*. К их числу относятся: «неверно, что...», «и», «или», «либо..., либо...», «если..., то...», «когда..., тогда...» и другие. Связывая при помощи этих и им подобных союзов высказывания, мы хотели бы быть уверенными, что в результате получим из истины истину, или, по крайней мере, из осмысленных высказываний осмысленные. Но в естественном языке этим надеждам не суждено сбыться. Приведём по этому поводу несколько примеров.

Возьмём два истинных высказывания: «Земля вращается вокруг Солнца», «Луна вращается вокруг Земли». Их можно соединить союзом «и», получив новое истинное высказывание «Земля вращается вокруг Солнца и Луна вращается вокруг Земли». Истинность этого высказывания не изменится, если исходные высказывания переставить местами: «Луна вращается вокруг Земли и Земля вращается вокруг Солнца». Можно привести сколько угодно примеров такого рода. Так что же, надо принять правило, позволяющее переходить от конструкции вида «A и B» к конструкции вида «B и A»? – Нет, поскольку такой переход в естественном языке корректен не всегда. Например, переставим местами высказывания в предложениях «Мэри вышла замуж и родила ребёнка», «Иванов заболел и пошёл в поликлинику». Получим «Мэри родила ребёнка и вышла замуж», «Иванов пошёл в поликлинику и заболел». Что тут истинно – сейчас не важно. Существенно то, что если истинно первое, то ложно второе и наоборот. Истинностное значение более не сохраняется.

Хорошо хоть то, что в процессе перехода от «А и В» к «В и А» мы сохранили осмысленность результата. Может ли перестановка высказываний относительно союза «и» гарантировать осмысленность? – К сожалению, тоже нет. Возьмём осмысленное высказывание «Чашка упала и разбилась». Но переход к «Чашка разбилась и упала» ведёт к потере смысла. Совсем зловеще выглядит переход от печального, но осмысленного «NN заболел и умер» к бессмысленному «NN умер и заболел».

Не лучше дела обстоят с союзом «или». Высказывание «Ты или с нами, или против нас» подразумевает, что либо верна первая альтернатива, либо вторая, а третьей не дано. Это исключающий смысл союза «или». Но когда вы говорите «Я или простудился, или у меня грипп», то здесь «или» не исключает, что вы и простудились, и больны гриппом, т.е. здесь одна альтернатива не исключает другую. Могут подумать, что речь идёт о пустяках. Однако представим себе, что некто попал под следствие и ему предъявили обвинение по статье, в которой встречается фраза «наказывается конфискацией имущества или лишением свободы на срок до 2 лет». Для обвиняемого далеко не безразлично, как толкуется здесь «или» – в исключающем либо в не исключающем смысле. Аналогичные трудности возникают и в отношении других логических союзов.

Получается, что в естественном языке у нас есть серьёзные проблемы как с самими знаками, так и с операциями над знаками. В естественном языке принципиально не удаётся точно сформулировать понятие правильно построенного выражения, строго задать условия, при которых выражение будет иметь семантическое значение, однозначно определить правила операций со знаками. Построить на такой зыбкой базе строгую теорию рассуждений невозможно. Выход – в переходе к искусственному языку.

Сама по себе искусственность языка ещё не гарантирует, что он будет свободен от недостатков естественного языка. Поэтому нашей целью будет построение такого искусственного языка, в котором:

1. На синтаксическом уровне будет точно определено понятие правильно построенного выражения языка;
2. Каждому правильно построенному выражению будет строгим образом сопоставлено семантическое значение.

Короче говоря, предполагается точно сформулировать синтаксис и семантику искусственного логического языка. Такой язык неизбежно окажется искусственным ещё и в том смысле, что его конструкции будут выглядеть непривычно, а использование их вызовет затруднения у начинающих. Но это неизбежная цена. Мы уже свыклись с мыслью, что прогресс в одном отношении оборачивается потерями в другом. Мы вынуждены расстаться с универсальной гибкостью естественного языка, дарующего нам свободу общения. Взамен мы обретём строгую теорию рассуждений, которая избавит нас от неопределённостей и гарантирует переход от истин к истинам.

ГЛАВА 4. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Нашей первой логической теорией будет *логика высказываний*. Вывод, который можно сделать исходя из выше изложенного, состоит в том, что прежде чем её строить, необходимо представить высказывания таким образом, чтобы их логический смысл был ясным и понятным. Для достижения этой цели высказывания должны быть приведены к некоторой стандартной форме, фиксирующей их логическую структуру. Высказывания состоят из слов, поэтому, казалось бы, начать следует с анализа логических особенностей составных частей высказываний, которые сами высказываниями не являются. Однако такой анализ в действительности более труден, чем изучение логических связей между самими высказываниями. Поэтому в современной логике прибегают к приёму, широко распространенному в точных науках. Если для решения проблемы нужно решить задачу Q1, а затем задачу Q2, и при этом задача Q2 проще, чем Q1, то предположим, что мы уже решили задачу Q1. Тогда можно приступить к решению задачи Q2, с тем, чтобы позднее вернуться к первой задаче.

§1. Язык логики высказываний

Ввиду неясности того, что такое высказывание в естественном языке, отнесём эту проблему к логической прагматике и возложим на пользователя логики решение задачи, является ли конкретное предложение естественного языка высказыванием или не является. Допустим, однако, что в нашем распоряжении есть совокупность не вызывающих сомнения конкретных высказываний. Необходимо иметь возможность логически связывать эти высказывания между собой. Как было установлено, союзы естественного языка двусмысленны и не годятся для этой цели. Поэтому нужны особые *знаки для обозначения операций с высказываниями* — **логические связки**, которым в дальнейшем будет придан точный смысл. С прагматической точки зрения, эти операции должны быть скоординированы с операциями естественного языка, но избавлены от недостатков последних.

Пусть такими знаками будут $\neg$ (приблизительно соответствует оборотам «не», «неверно, что»), & (читается как «и»), $\vee$ (приблизительно соответствует не исключающему «или»), $\to$ (выражает условную связь типа «если, то»), $\leftrightarrow$ (выражает равносильность высказываний). Назовём знак $\neg$ *отрицанием*, знак & – *конъюнкцией*, знак $\vee$ – *дизъюнкцией*, знак $\to$ – *импликацией* и знак $\leftrightarrow$ – *эквиваленцией*. Все эти знаки назовём *исходными логическими связками*. Помимо исходных, существуют и другие логические связки, о которых речь впереди.

Логические связки образуют новые высказывания из имеющихся. Например, из высказываний «Снег бел» и «$2 \times 2 = 4$» можно построить высказывание «$\neg$ Снег бел» (читается «Неверно, что снег бел»), «Снег бел & $2 \times 2 = 4$» (читается «Снег бел и $2 \times 2 = 4$»), «Снег бел $\vee$ $2 \times 2 = 4$» (варианты чтения: «Снег бел или $2 \times 2 = 4$», «Или снег бел, или $2 \times 2 = 4$», «Либо снег бел, либо $2 \times 2 = 4$» и др.), «Снег бел $\to$ $2 \times 2 = 4$» (варианты чтения: «Если снег бел, то $2 \times 2 = 4$», «Когда снег бел, тогда $2 \times 2 = 4$», «$2 \times 2 = 4$ при условии, что снег бел» и др.), «Снег бел $\leftrightarrow$ $2 \times 2 = 4$» (читается «Снег бел тогда, и только тогда, когда $2 \times 2 = 4$», «Снег бел, если, и только если, $2 \times 2 = 4$», «Снег бел в том, и только в том, случае, когда $2 \times 2 = 4$», «Снег бел эквивалентно $2 \times 2 = 4$» и др.).

Предыдущий абзац демонстрирует неудобство оперирования конкретными высказываниями тогда, когда необходимо прояснить общую ситуацию, с этими высказываниями непосредственно не связанную. Представьте себе, что математик объясняет операции с числами, используя только конкретные знаки чисел. Как сформулировать в общем виде, например, что от перестановки слагаемых сумма не меняется? Выписывать все случаи типа «$1 + 2 = 2 + 1$», «$1+ 3 = 3 + 1$» и т.д., до бесконечности? Разумеется, имеется другое, более компактное решение – использование *переменных*. Тогда запись $x + y = y + x$ как бы охватывает все возможные случаи сумм конкретных чисел.

Аналогичным образом, логика не мыслима без переменных, только в нашем случае это будут не переменные по числам, а *переменные по высказываниям*. Переменные по высказываниям, или *пропозициональные* переменные, будем обозначать буквами p, q, r, s или буквой p с нижним числовым индексом: p_1, p_2, ..., p_n, ... Как вместо числовых переменных можно подставлять конкретные числовые значения, так и вместо пропозициональных переменных можно подставлять любые конкретные высказывания. Ограничение только одно (как и в математике): *одинаковые пропозициональные переменные должны замещаться одинаковыми высказываниями*. А вот *разные пропозициональные переменные не обязательно замещать разными высказываниями*. Например, в выражение $p \leftrightarrow p$ вместо p можно подставить «Снег бел», получив «Снег бел $\leftrightarrow$ Снег бел», но нельзя из $p \leftrightarrow p$ получить «Снег бел $\leftrightarrow 2 \times 2 = 4$». Из $p \leftrightarrow q$, однако, можно получить как «Снег бел $\leftrightarrow$ Снег бел», так и «Снег бел $\leftrightarrow 2 \times 2 = 4$».

Дальнейший замысел таков: использовать в теории высказываний не конкретные высказывания (тем более, что они на практике могут быть сомнительными), а только пропозициональные переменные. Замещение переменных конкретными высказываниями относится уже не к логической теории, а к прагматике логики.

Теперь всё готово для выполнения первой задачи, намеченной в конце предыдущего параграфа: точно определить синтаксис языка логики высказываний. Сделаем это в два этапа: на первом определим алфавит логики высказываний, а на втором — понятие правильно построенного выражения над этим алфавитом. Правильно построенные выражения назовём *формулами*, поскольку, как и в математике переменных величин, перед нами будут не конкретные высказывания, а их *формы*, подлежащие заполнению при помощи замещения пропозициональных переменных конкретными высказываниями.

Определение языка логики высказываний.

I. *Алфавит.*

1. Бесконечный список пропозициональных переменных: $p, q, r, s, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$.

2. Пять логических связок: $\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

3. Левая и правая скобки в качестве двух технических букв: (,).

4. Ничто другое, кроме упомянутого в пунктах 1—3 определения алфавита, к алфавиту не относится.

II. *Определение формулы.*

1. Каждая пропозициональная переменная $p, q, r, s, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ есть формула.

2. Если A — формула, то и $\neg A$ — тоже формула.

3. Если A и B — формулы, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ — тоже формулы.

4. Ничто другое, кроме построенного в соответствии с пунктами 1—3 определения формулы, формулой не является.

Посмотрим, как работает определение формулы. Возьмём следующий список выражений: p, q, p_1, $\neg p$, $(q \to \neg p)$, $((q \to \neg p) \vee p_1)$, $(p_1 \ \& \ ((q \to \neg p) \vee p_1))$. Формулы это или нет? Гадать не нужно, достаточно воспользоваться определением и построить соответствующее рассуждение:

1. p – формула по пункту II.1;
2. q – формула по пункту II.1;
3. p_1 – формула по пункту II.1;
4. $\neg p$– формула по пункту 1 данного рассуждения и пункту II.2;
5. $(q \to \neg p)$ – формула по пунктам 2, 4 и II.3;
6. $((q \to \neg p) \vee p_1)$ – формула по пунктам 5, 3 и II.3;
7. $(p_1 \ \& \ ((q \to \neg p) \vee p_1))$ – формула по пунктам 3, 6 и II.3.

Полученное семи шаговое доказательство не оставляет сомнений, что все объекты списка являются формулами. Идея подобных доказательств ясна: из пропозициональных переменных, как из кубиков или элементов конструктора, при помощи логических связок и скобок, строятся всё более сложные правильные выражения – формулы.

Пункты I.4 и II.4 построения языка позволяют отбрасывать выражения, которые либо незаконно используют отсутствующие в нашем алфавите буквы, либо сконструированы с нарушением правил построения формул. Например, выражение s_1 не будет формулой по I.4, так как его нет в списке пропозициональных переменных алфавита, заданном пунктом I.1, не говоря уже о явно не относящихся к делу пунктах I.2–I.3. Выражение $p \to q$ тоже не будет формулой! Конечно, p и q – формулы, но по пункту II.3 из них можно получить $(p \to q)$, а не $p \to q$. Шаги II.1– II.2 тем более не помогут получить $p \to q$, и, в соответствии с пунктом II.4, выражение $p \to q$ не будет формулой.

Как видно из определения формулы, отрицание $\neg$ требует для применения одну формулу, а остальные связки – две формулы. Поэтому отрицание – это *унарная* логическая связка, а все другие исходные логические связки – *бинарные*.

Формулы, не содержащие логических связок, называются *простыми* или *атомарными*. Очевидно, что пропозициональные переменные, и только они, являются простыми (атомарными) формулами. Других простых (атомарных) формул нет. Если же в формуле имеется хотя бы одна логическая связка, то такие формулы называются *сложными* или *составными*. Все отличные от пропозициональных переменных формулы будут сложными (составными). Например, формула p — простая, а формула $\neg p$ — сложная. С прагматической точки зрения эти определения могут помочь в логическом анализе естественного языка. Поэтому перенесём их на высказывания: высказывание будет *простым* (*атомарным*), если оно не содержит выражений, играющих роль логических связок; в противном случае оно будет *сложным* (*составным*).

Пусть A и B — формулы. Формула B называется *подформулой* формулы A, если в любом доказательстве того, что A — формула, предварительно доказывается, что B — формула. Другими словами, B является подформулой A, если B обязательно должна быть использована для построения A. Например, на седьмом шаге было доказано, что выражение $(p_1 \& ((q \to \neg p) \vee p_1))$ есть формула. Какие подформулы есть в этой формуле? — Они все одна за другой появляются на предыдущих шагах доказательства: p, q, p_1, $\neg p$, $(q \to \neg p)$, $((q \to \neg p) \vee p_1)$. Ясно, что без предварительного доказательства того, что все только что перечисленные выражения — формулы, нельзя доказать, что и $(p_1 \& ((q \to \neg p) \vee p_1))$ — формула. Это и означает, что без перечисленных формул невозможно осуществить построение итоговой формулы. Других подформул в ней нет. Мы могли бы вставить в рассматриваемое доказательство шаг, утверждающий, допустим, что s — формула. Но без этого шага можно обойтись, он лишний и вообще не нужен. Поэтому s не будет подформулой итоговой формулы. Кроме того, в силу данного определения, A не считается подформулой самой себя.

Предположим, что A — сложная формула. Логическая связка, появляющаяся последней при построении A, с учётом места её вхождения, называется *главной*. В формуле $\neg p$ единственная связка $\neg$ и будет главной. Главными связками формул $(q \to \neg p)$, $((q \to \neg p) \vee p_1)$ и $(p_1 \& ((q \to \neg p) \vee p_1))$ будут, соответственно, $\to$, $\vee$ и &. Более сложный случай. В формулах $((p \vee q) \vee r)$ и $(p \vee (q \vee r))$ (убедитесь самостоятельно, что это формулы) встречается по два вхождения одной и той же связки $\vee$. Поэтому просто сказать, что главная связка — это дизъюнкция, не достаточно. Надо ещё указать, какая из двух дизъюнкций главная, а какая нет. Для этого необходимо отметить место вхождения главной дизъюнкции. В первой формуле это будет вторая дизъюнкция: $((p \vee q) \boldsymbol{\vee} r)$. Во второй формуле главной будет первая дизъюнкция: $(p \boldsymbol{\vee} (q \vee r))$.

Подформулы формулы A, соединённые её главной связкой, будем называть *главными подформулами* формулы A. Поскольку главная связка A либо унарна, либо бинарна, возможны два случая. Первый. A имеет вид $\neg$B. Тогда B и будет единственной главной подформулой формулы A. Второй. A имеет вид (B # C), где # – какая-либо бинарная связка. Тогда главными подформулами A будут B и C.

Особо важную роль в логике играет импликация, поэтому для главных подформул A и B импликации (A $\rightarrow$ B) приняты специальные обозначения: стоящая слева от стрелки подформула A называется *антецедентом* импликации (A $\rightarrow$ B), а стоящая справа от стрелки подформула B называется *консеквентом* импликации (A $\rightarrow$ B).

Обратим внимание на то существенное обстоятельство, что при задании языка логики высказываний и в последующих относящихся к этому языку определениях мы были вынуждены пользоваться естественным языком. Использование фраз русского языка, запятых, тире, многоточий, цифр и т.д. – всё это не входит в язык логики высказываний, правильные выражения которого могут содержать только пропозициональные переменные, связки и скобки. Данный факт не случаен. Чтобы построить искусственный язык, нам требуется описать шаги этого построения. Сделать это можно, лишь воспользовавшись уже имеющимся в нашем распоряжении языком, в котором есть достаточные для решения указанной задачи средства. Для нас таким языком является естественный русский язык. Но ведь пользоваться им из-за отмеченных недостатков опасно! Утешимся тем, что мы воспользовались не всей мощью естественного языка, нередко уводящей нас за пределы смысла, а лишь *узким фрагментом естественного языка*, не оставляющим сомнений в его ясности и однозначности.

Этот узкий фрагмент естественного языка в нашем случае играл роль метаязыка по отношению к построенному с его помощью языку логики высказываний, выступающему в функции языка-объекта. **Метаязык** – *это язык, на котором мы говорим о другом языке. Тогда язык, о котором говорят на метаязыке, называется* **языком-объектом**. Чаще всего метаязыком является естественный язык, а языком-объектом нередко оказывается язык искусственный. Но так бывает не всегда. При изучении незнакомого иностранного языка его описание даётся на родном языке, который будет метаязыком по отношению к объектному иностранному естественному языку. Бывает даже, что метаязыком оказывается искусственный язык, посредством которого строится другой искусственный язык.

В используемом метаязыке есть свои переменные, которые лучше назвать *метапеременными*. В выражениях «Если A − формула, то и $\neg$A − тоже формула» и «Если A и B − формулы, то (A & B), (A $\vee$ B), (A $\to$ B), (A $\leftrightarrow$ B) − тоже формулы» буквы A и B не обозначают конкретные формулы, а играют роль метапеременных, вместо которых можно подставлять любые формулы. В свою очередь, содержащие метапеременные конструкции вида $\neg$A, (A & B), (A $\vee$ B), (A $\to$ B), (A $\leftrightarrow$ B) являются не конкретными формулами, а *метаформулами*. Однако, используя метаформулы, мы чаще всего говорим не о метаязыке, как сейчас (обсуждая сам метаязык, мы говорим о нём на метаметаязыке!), а имеем в виду язык-объект, в котором метаформула принимает вид какой-то формулы. Поэтому выражения A, B, $\neg$A, $\neg$B, (A & B), (A $\vee$ B), (A $\to$ B), (A $\leftrightarrow$ B) мы называем формулами (как это и было в определении формулы).

В этих же выражениях есть метаязыковая импликация «Если..., то...», существующая наряду с объектной импликацией «$\to$», и метаязыковая конъюнкция «и», также сосуществующая с объектной конъюнкцией «&». Но мы уже видели, что союз «и» естественного языка не однозначен. Такова же (если не хуже, как мы вскоре увидим) ситуация и с союзом «если, то». Как же тогда понимать заявление о том, что наш метаязык ясен и однозначен, тем более, что в нём используются и другие естественные логические связки (например, выше использовались фразы «A *не* считается подформулой самой себя», «главная связка *либо* унарна, *либо* бинарна»)? *Выход в том, чтобы логические связки метаязыка интерпретировать так же, как и логические связки объектного языка.* Другими словами, когда мы уточним поведение объектных логических связок, те же самые «поведенческие нормы» мы должны будем распространить и на метаязыковые логические связки. Следовательно, логические связки метаязыка − это не союзы естественного языка. Мы придадим им более узкий и жёсткий смысл.

Вернёмся к рассмотрению полученного объектного языка − языка логики высказываний. Этот язык полностью определён с синтаксической точки зрения, причём точным образом. Точность здесь такова, что наше определение данного языка можно без особых проблем перевести на какой-либо язык программирования. Тогда компьютер сможет определять, является ли некоторая последовательность букв правильно построенным выражением языка логики высказываний или не является.

Языки, в которых имеется точно определённое понятие правильно построенного выражения языка, назовём **формальными**. Язык логики высказываний – первый пример формального языка. Языки программирования также являются формальными языками. Малейшая неточность в написании компьютерной программы (точку не там поставили, скобку забыли или ещё какая-нибудь мелочь) – и компьютер откажется выполнять эту программу. А вот обычный математический язык, вопреки ожиданию, не является формальным. Загляните в математические учебники по классическим разделам математики. Разве там есть понятие правильно построенного выражения языка соответствующей математической дисциплины? Вместе с тем, язык классической математики явно не естественный. Это пример искусственного, но не формального языка. Поскольку, однако, его точность намного превышает точность естественного языка, можно сказать, что это полу формальный язык.

Таким образом, не всякий искусственный язык формален, но всякий формальный язык искусственен. Между естественным языком и формальными языками имеется область промежуточных по строгости искусственных языков. Они точнее естественного языка, но уступают в точности формальным языкам. Язык права, например, уступает в точности и полу формальному языку математики, но всё же это по сути искусственный язык, превосходящий по строгости естественный язык и требующий специального изучения. Таковы же языки многих научных дисциплин.

При использовании иностранных языков возникает проблема перевода либо с иностранного на родной язык, либо, наоборот, с родного на иностранный. Аналогичным образом, перед нами ставится задача перевода либо с языка логики на русский естественный язык, либо, наоборот, с русского естественного языка на язык логики.

Для того, чтобы перевести логическую формулу на естественный язык, требуется в этой формуле, во-первых, заменить все атомарные подформулы высказываниями естественного языка (соблюдая правило, что одинаковые пропозициональные переменные заменяются одинаковыми высказываниями), во-вторых, заменить логические связки подходящими союзами и частицами естественного языка, используя, если потребуется, и знаки препинания. Переведём, например, формулу $(p \to (q \vee \neg r))$ на естественный язык. Пусть p – высказывание «Петя купил лотерейный билет», q – высказывание «Петя выиграет» и r – высказывание «Пете повезёт». Заменяя связки, на втором шаге получим итоговый перевод: «Если Петя купил лотерейный билет, то либо Петя выиграет, либо Пете не повезёт».

Не следует ожидать, что любую формулу логики высказываний можно перевести на естественный язык так, что в результате получится стилистически приемлемое естественное высказывание. Более важна для практики обратная задача по переводу с естественного языка на язык логики, поскольку при этом выявляется логический смысл исходного естественного высказывания. Здесь логика служит инструментом прояснения естественного языка.

Чтобы перевести естественное высказывание S на язык логики высказываний, требуется, во-первых, найти в S все простые высказывания, во-вторых, присвоить найденным простым высказываниям буквенные имена, используя для этого любые пропозициональные переменные, в-третьих, соединить введённые пропозициональные переменные логическими связками и скобками так, чтобы получившаяся формула отражала логику исходного высказывания S (если, конечно, само исходное высказывание S не было простым).

Например, переведём на язык логики высказывание «Лиза была бы умной, если бы не была такой бедной и сентиментальной». Простых высказывания здесь три: «Лиза была бы умной», «Лиза была бы такой бедной», «Лиза была бы такой сентиментальной». Заметим, что в явном виде этих трёх высказываний в исходном нет. Введём пропозициональные обозначения: p – «Лиза была бы умной», q – «Лиза была бы такой бедной» и r – «Лиза была бы такой сентиментальной». Итоговый перевод выглядит следующим образом: $(\neg(q \,\&\, r) \to p)$. Буквальное прочтение даёт «Если неверно, что Лиза была бы такой бедной и Лиза была бы такой сентиментальной, то Лиза была бы умной».

Поскольку высказывания естественного языка могут быть двусмысленными, проблему однозначности перевода на язык логики невозможно решить в принципе. Как перевести, скажем, высказывание «Я тебе позвоню, только если ты мне позвонишь»? Простыми высказываниями тут будут «Я тебе позвоню» (p) и «Ты мне позвонишь» (q). Многим перевод покажется простым и очевидным: ($q \to p$), т.е. «Если ты мне позвонишь, то и я тебе позвоню». Но тогда исходным высказыванием было бы «Я тебе позвоню, если ты мне позвонишь». И тогда слово *только* здесь ни при чём, оно не несёт никакой дополнительной логической информации, и мы его игнорируем.

Но в высказываниях (*) «n делится на 2, только если n делится на 4» и (**) «n делится на 4, только если n делится на 2» слово *только* играет важную роль. В соответствии с интуитивным смыслом, (*) утверждает, что делящиеся на 2 числа находятся среди чисел, делящихся на 4, тогда как (**) утверждает, что делящиеся на 4 числа находятся среди чисел, делящихся на 2. Поэтому (*) ложно, а (**) истинно. Обозначим «n делится на 2» через r, а «n делится на 4» через s. Вновь проигнорируем слово *только*. Тогда переводом (*) будет ($s \to r$), а переводом (**) – ($r \to s$). Однако в этом случае (*) окажется истинным, поскольку ($s \to r$), т.е. «Если n делится 4, то n делится на 2», истинно. Двойственным образом, (**) окажется ложным, так как ($r \to s$), т.е. «Если n делится на 2, то n делится на 4», ложно. Выходит, игнорировать *только* нельзя! Как же перевести (*) и (**)? Оказывается, слово *только* может пониматься в значении, переворачивающем импликацию: сказать «A, только если B» означает то же самое, что и «Если A, то B». В таком случае переводом (*) будет ложное ($r \to s$), т.е. «Если n делится на 2, то n делится на 4», а переводом (**) – истинное ($s \to r$), т.е. «Если n делится 4, то n делится на 2», что и требовалось.

Возвращаясь к высказываниям о телефонных звонках, приходится теперь трактовать исходное высказывание как импликацию ($p \to q$), т.е. «Если я тебе позвоню, то ты мне позвонишь». Но исходное высказывание означало явно не это! Если уж оборачивать импликацию, то придётся учёсть фактор времени: «Если я тебе звоню, то это значит, что ты мне уже позвонил (или позвонила)». Но «Я тебе звоню» (p') и «Ты мне позвонил» (q') – это не то же самое, что «Я тебе позвоню» (p) и «Ты мне позвонишь» (q). В итоге в переводом «Я тебе позвоню, только если ты мне позвонишь» будет ($p' \to q'$).

Однако, вряд ли обещавший позвонить был столь изощрённым. Скорее всего, он просто имел в виду ($q \to p$). Но ведь и ($p' \to q'$) годится для перевода, тем более, что второй перевод, в отличие от первого, исходит из единообразного толкования слова *только* как переворачивающего импликацию. В итоге категорически утверждать, что один перевод правильный, а другой нет, не приходится. Естественный язык оставляет простор для разных интерпретаций и, соответственно, для разных переводов на язык логики.

§2. Табличная семантика

Построенный в предыдущем параграфе формальный язык оставался не интерпретированным, у него отсутствовала определённая семантика. **Интерпретация** *языкового выражения состоит в придании ему денотационного или смыслового значения. Задать* **семантику** *— значит установить правила интерпретации всех корректно построенных выражений языка.* В нашем случае корректно построенными выражениями будут формулы. Стало быть, задача состоит в установлении правил интерпретации всевозможных формул.

Основная идея заключается в следующем. Надо начать с интерпретации простых формул. Допустим теперь, что мы уже проинтерпретировали главные подформулы формулы A. В зависимости от интерпретации этих подформул мы должны уметь однозначно определять интерпретацию и самой формулы A. В случае реализации этой программы, значение целого выражения будет однозначно определяться значением его частей. Ничего подобного в семантике естественного языка нет. В уже рассмотренном предложении «Бесцветные зелёные идеи спят яростно» каждое входящее в него слово имеет значение, однако предложение в целом бессмысленно и семантического значения не имеет. Мы бы хотели уйти от самой возможности такой ситуации.

Приступим к реализации намеченной программы действий. Простыми формулами являются пропозициональные переменные, и только они. Но переменные — это не знаки в строгом смысле этого слова. Они не принимают определённого денотационного значения. Числовая переменная может указывать на любое число, а пропозициональная переменная — на любое высказывание. Но в этом и состоит смысловое значение переменной величины: указав область её возможных значений, мы определим смысл переменной. Мы умеем организовать пересчёт значений, например, переменной по положительным целым числам. Её значения образуют ряд 1, 2, 3, 4, 5 и т.д. Можно задать правило построения такого ряда (что и будет проделано в дальнейшем). Однако мы не в состоянии организовать явный систематический пересчёт всевозможных высказываний. Ведь даже не ясно, с какого высказывания надо начать!

Грозящую нашему замыслу катастрофу мы предотвратим, уменьшив притязания. Высказывания, как мы помним, это знаки, денотатами которых является либо истина, либо ложь. Значит, каково бы ни было значение пропозициональной переменной, т.е. каково бы конкретное высказывание её не замещало, это высказывание будет либо истинным, либо ложным. Отсюда все многообразие высказываний стягивается к двум случаям: 1) пропозициональная переменная указывает на истинное высказывание и 2) пропозициональная переменная указывает на ложное высказывание.

Сложные формулы строятся из пропозициональных переменных с использование связок и скобок. С содержательной точки зрения сложные формулы также представляют высказывания, причём составные. Поэтому разумно предположить, что сложные формулы, как и составные высказывания, имеют только две возможности: 1) сложная формула указывает на истину и 2) сложная формула указывает на ложь.

В любой ситуации у нас есть только два истинностных значения для формул: истина и ложь. Удобнее этот вывод реализовать в табличной форме. Пусть А – какая-либо формула. А может быть либо истинной, либо ложной, что мы выразим при помощи следующей таблицы.

А
и
л

Единственная исходная унарная логическая связка – это отрицание. Какое значение надо приписать отрицанию формулы А, т.е. формуле ¬А? Ответ очевиден: если А истинна, её отрицание ложно, и наоборот, если А ложна, её отрицание истинно. Приведём соответствующую таблицу.

А	¬А
и	л
л	и

(Обратите внимание: возможные истинностные значения формула A пишутся под A, а истинностные значения отрицания A пишутся под отрицанием ¬. Тот же стиль записи будет применён и для других логических связок.)

Оставшиеся логические связки бинарны, т.е. требуют двух исходных формул для построения новой. Однако для формул A и B имеется уже не две, а четыре возможности: (1) Обе истинны, (2) Первая истинна, вторая ложна, (3) Первая ложна, вторая истинна, (4) Обе ложны. Других возможностей нет.

A	B
и	и
и	л
л	и
л	л

Рассмотрим, какую интерпретацию следует придать конъюнкции (A & B), дизъюнкции (A $\vee$ B), эквиваленции (A $\leftrightarrow$ B) и (нетривиальная задача) импликации (A $\rightarrow$ B). Принятая программа требует, чтобы истинностное значение конъюнкции, дизъюнкции, эквиваленции и импликации однозначно зависело от истинностных значений главных подформул A и B. Продолжим реализацию этой программы.

Начнём с конъюнкции. Случай (1). Пусть A и B вместе истинны. Что приписать (A & B)? − Либо истину, либо ложь. Но что конкретно? Допустим, высказывания «Чашка упала» и «Чашка разбилась» оба истинны, и A указывает на первое высказывание, а B на второе. Нет никаких оснований сомневаться, что в этой ситуации конъюнкцию (A & B) следует признать истинной: «Чашка упала & Чашка разбилась». Допустим теперь, что B указывает на первое высказывание, а A − на второе. Получаем «Чашка разбилась & Чашка упала». Если, как это делается в естественном языке, примешивать к пониманию конъюнкции указание на временной порядок событий «A и затем B», то теперь конъюнкцию (A & B) следует признать ложной. Но мы не имеем права одному и тому же выражению языка приписывать как истину, так и ложь. Следовательно, необходимо отлучить конъюнкцию от проблем времени[5].

Насколько такое отлучение согласуется с естественной языковой интуицией? На удивление, неплохо согласуется. В отличие от нестрогой формулировки «Чашка разбилась и упала», формулировка «Чашка разбилась & Чашка упала» наталкивает на мысль, что здесь фиксируется не временной порядок событий, а просто два изолированных факта. Изолировать разделённые во времени факты можно указанием на время совершения события. Тогда абсурдное «NN умер и родился» превратится во вполне приемлемое «NN умер в n году и NN родился в m году». Просто надо аккуратнее формулировать свои высказывания.

Вывод для случая (1): если A истинно и B истинно, то конъюнкция (A & B) также истинна. Оставшиеся случаи (2)-(4) не представляют трудности: ложность одной из формул A или B делает ложным и их совместное утверждение (что полностью соответствует нормальной языковой интуиции), так что в этих трёх случаях конъюнкция (A & B) будет ложной.

Обратимся к дизъюнкции. Вновь затруднение возникает только в случае (1): как оценить формулу $(A \vee B)$, если и A, и B истинны? — Ведь есть исключающий смысл и не исключающий смысл союза «или». Затруднение преодолевается легко. Раз есть два чётко сформулированных понимания логического союза «или», надо вести не одну, а две связки для отражения упомянутого различия. Условимся, что связка $\vee$ будет не исключающей. А для исключающей дизъюнкции выберем значок ∇. Правда, теперь придётся расширить понятие формулы, добавив пункт: если A и B — формулы, то и $(A \nabla B)$ — тоже формула.

Теперь в случае (1) нестрогая дизъюнкция $(A \vee B)$ даёт истину (поскольку не исключает обеих альтернатив), а строгая дизъюнкция $(A \nabla B)$ даёт ложь (поскольку требует истинности ровно одной из альтернатив). В случаях (2) и (3) ровно одна из альтернатив истинна, и обе дизъюнкции будут истинны. В (4) случае выбирать не из чего, и потому обе дизъюнкции ложны.

Носящая, по сравнению с другими, более искусственный характер связка эквиваленции $\leftrightarrow$ (ведь в обыденном естественном языке она, по-видимому, не употребляется вовсе) имеет простой смысл: она отслеживает равенство истинностных значений. А именно, если A и B имеют одинаковые истинностные значения (как в случаях (1) и (4)), эквиваленция $(A \leftrightarrow B)$ будет истинна. Если же A и B имеют разные истинностные значения (в случаях (2) и (3)), то эквиваленция $(A \leftrightarrow B)$ ложна.

Осталось разобрать импликацию $(A \to B)$. Случай (1) обычно не вызывает сомнений. Если A истинна и B истинна, то и вся импликация $(A \to B)$ признаётся истинной. Однако здесь проблема, которая в случае других логических операций стоит не столь остро. Мы имеем ввиду возможность брать в качестве A и B любые высказывания. Пусть A — высказывание «Курение вредно», а B — высказывание «$2 \times 2 = 4$». Оба высказывания истинны и, в соответствии с вышеизложенным, истинной является их конъюнкция: (Курение вредно & $2 \times 2 = 4$), что читается как «Курение вредно и $2 \times 2 = 4$». Но уже нестрогая дизъюнкция этих высказываний, которая тоже истинна, выглядит странновато: (Курение вредно $\vee$ $2 \times 2 = 4$), что при прочтении звучит как «Или курение вредно, или $2 \times 2 = 4$». На это можно ответить, что смысл данного высказывания в утверждении, что по крайней мере одно (а, может быть, и оба) из этих высказываний истинно. Но так оно и есть, поэтому данная дизъюнкция действительно утверждает истину!

Но высказывание «Если Курение вредно, то $2 \times 2 = 4$» более чем странно. Как на основе информации о вреде курения можно утверждать что-то о числах, какая связь между медицинским фактом и арифметической истиной? Действительно, в естественном языке выражение «Если A, то B» применяется лишь в тех ситуациях, когда усматривается причинная или какая-то иная связь между A и B, и тогда нет сомнений, что истинность A влечёт истинность B. Примеров можно привести сколько угодно: «Если число делится на 4, то оно делится и на 2», «Если гвоздь нагреть, то он удлинится», «Если небо закроют облака, то станет пасмурно» и т.д.

Приходится признать, что в логике высказываний действительно не всё в порядке с импликацией. Однако это следствие чрезмерной простоты данной теории. Когда мы дойдём до логики предикатов и введём понятие универсума рассуждений, проблема, по существу, исчезнет. Но пока придётся смириться с возможностью появления импликаций, в которых антецедент и консеквент по смыслу между собой не связаны.

Если отвлечься (повторим, временно) от проблемы смысловой связи между антецедентом и консеквентом импликации, то в остальном наша импликация безупречна. Как и было сказано, если обе главные подформулы импликации истинны, то и вся импликация истинна. Это был случай (1). В случае (2) вообще нет никаких разногласий: если антецедент импликации истинен, а консеквент ложен, то вся импликация, безусловно, ложна. «Если 8 делится на 4, то 8 делится на 3», «Если Москва столица России, то и Вашингтон столица России», «Если лев крупнее шакала, то шакал сильнее льва» и т.д. — во всех этих примерах из истинного антецедента имплицировался ложный консеквент, что делало импликации ложными.

Рассмотрим случаи (3) и (4): Пусть антецедент A ложен. Каково должно быть истинностное значение импликации? Некоторые полагают, что в обоих случаях должна быть ложь. Допустим это на секунду. Но тогда поведение импликации ничем не отличается от поведения конъюнкции! Значит, такое решение не годится. Нет никаких оснований отождествлять импликацию и конъюнкцию. На самом деле в случаях (3) и (4) импликация будет истинной. Иначе говоря, ложность антецедента обеспечивает истинность импликации.

Такое свойство импликации многими людьми, слышавшими о логике, воспринимается как парадокс. Никакого парадокса нет, если учесть, что импликация тесно связана с идеей закона. Приведём простой пример арифметического закона: «Если число делится на 6, то число делится и на 3» (имеется ввиду делимость нацело). Есть ли исключения из этого закона? — Нет ни одного исключения. Ведь исключением было бы число, которое на 6 делится, а на 3 нет. Но таких чисел не существует. Значит, закон верен для *всех* чисел. А раз для всех, значит, и для 3. Высказывание «Если 3 делится на 6, то 3 делится на 3» истинно, поскольку это просто частный случай общего закона. Антецедент здесь ложен, а консеквент истинен, т.е. имеем случай (3). Аналогичным образом, высказывание «Если 5 делится на 6, то 5 делится на 3» также частный случай того же закона и потому также истинно. Тут имеем случай (4), когда ложен и антецедент, и консеквент.

Если закон импликативного вида не вызывает сомнений, то рассуждения существенным образом облегчаются. Например, без всяких вычислений мы скажем, что высказывания «Если 325926 делится на 6, то 325926 делится и на 3» и «Если 325916 делится на 6, то 325916 делится и на 3» оба истинны. При этом 325926 на 6 делится, а 325916 не делится. Но эта дополнительная информация на истинностное значение импликаций не влияет. Даже если мы не сможем практически проверить, делится ли какое-либо громадное число n на 6 (допустим, в этом числе тысячи цифр), то всё равно закон действует: «Если n делится на 6, то n делится и на 3» истинно.

Иногда думают, что тут дело в математике, а за её рамками, дескать, это уже не так. Но законы встречаются не только в математике. Например, высказывание «Все греки смертны» закономерно. Следовательно, импликация «Если Наполеон грек, то Наполеон смертен» истинна (случай (3)). Фиксирующее юридический постулат высказывание «Ни одно преступление не должно остаться безнаказанным» влечёт истинность импликации «Если любовь – преступление, то любовь не должна остаться безнаказанной» (случай (4)).

Теперь абстрагируемся от идеи закона, удержав найденные характеристики импликации: импликация ложна в одном, и только одном случае, когда её антецедент истинен, а консеквент ложен. В остальных трёх случаях импликация истинна. Случаи (3) и (4) дают правило: *ложное высказывание имплицирует любое (т.е. как истинное, так и ложное).* Например, в силу ложности высказывания «$2 \times 2 = 5$», импликация «Если $2 \times 2 = 5$, то Луна сделана из зелёного сыра» истинна независимо от того, съедобна Луна или нет!

Резюмируем полученные результаты в следующей общей для всех рассмотренных бинарных связок таблице истинности.

A	B	(A & B)	(A $\vee$ B)	(A ∇ B)	(A $\leftrightarrow$ B)	(A $\rightarrow$ B)
и	и	и	и	л	и	и
и	л	л	и	и	л	л
л	и	л	и	и	л	и
л	л	л	л	л	и	и

Таким образом, мы выполнили намеченную программу. Теперь, каковы бы ни были формулы A и B, в зависимости от их истинностных значений мы однозначно вычислим значение формул, в которых они являются главными подформулами (включая данную ранее таблицу для отрицания). Отныне *логические связки метаязыка мы будем интерпретировать в соответствии с данными таблицами.* Ничего другого они означать не будут. Наш метаязык действительно стал ясным и однозначным, избежав двусмысленностей естественного языка. Например, метаязыковая импликация «Если A – формула, то $\neg$A – тоже формула» истинна. Истинна или ложна импликация «Если w$\neg$ – формула, то $\neg$w$\neg$ – тоже формула»? Последняя импликация получена из первой заменой метапеременной A на выражение w$\neg$ и, значит, является её частным случаем. Но антецедент «w$\neg$ – формула» ложен. Тем самым метаязыковая импликация «Если w¬ – формула, то ¬w¬ – тоже формула», в соответствии с таблицей для импликации, будет истинной!

§3. Законы, противоречия, фактуальные высказывания

Располагая таблицами истинности для логических связок &, ∨, ∇, ↔, → и ¬, можно анализировать на предмет истинности или ложности любые сколь угодно сложные высказывания и формулы, построенные с их помощью. Общее правило здесь таково: *в ходе вычисления истинностных значений составной формулы А надо вначале вычислить истинностные значения всех её подформул в той последовательности, которая соответствует шагам построения формулы А; затем вычисляется значение самой формулы А.*

Например, пусть А есть формула ¬¬p. Построим следующую таблицу истинности, следуя процессу построения А.

p	¬p	¬¬p
и	л	и
л	и	л

Из таблицы видно, что первое отрицание p истину превращает в ложь и наоборот. Но второе отрицание снова ставит все на свои места: если ¬p ложно, то ¬¬p будет истинно; и если ¬p истинно, то ¬¬p будет ложно. В итоге столбцы таблицы для p и ¬¬p совпадают. Значит, в нашей семантике утверждать высказывание и дважды его отрицать – это одно и то же.

Обратите внимание, что столбцы истинностных оценок следует стараться писать точно под тем высказыванием или логической связкой, к которым данный столбец относится. В противном случае может возникнуть путаница. Столбец, который стоит под атомарной формулой или под главной связкой составной формулы, называется *результирующим* для данной формулы. Для p это <и, л>, для ¬p – <л, и>, а для ¬¬p вновь <и, л>.

Возьмем формулу вида ((A ∨ B) & ¬(A & B)). Она имеет вид выражения (X & ¬Y), где вместо X стоит (A ∨ B), а вместо Y стоит (A & B). Отсюда видно, что сначала следует вычислить истинностное значение X, затем истинностное значение Y, затем определить значение $\neg Y$ и, наконец, вычислить истинностное значение конъюнкции $(X \& \neg Y)$, соединяя столбцы для X и $\neg Y$ посредством конъюнкции. Заодно сравним полученный результат с таблицей истинности для ∇.

A	B	$(A \vee B)$	$(A \& B)$	$\neg(A \& B)$	$((A \vee B) \& \neg(A \& B))$	$(A \nabla B)$
и	и	и	и	л	л	л
и	л	и	л	и	и	и
л	и	и	л	и	и	и
л	л	л	л	и	л	л

В приведенной таблице при вычислении возможных истинностных значений высказывания вида $\neg(A \& B)$ сначала вычислялось $(A \& B)$, и лишь затем $\neg(A \& B)$. Это означает, что результирующим столбцом для $\neg(A \& B)$ является столбец, расположенный под отрицанием $\neg$. После того, как были определены истинностные значения высказываний вида $(A \vee B)$ и $\neg(A \& B)$, не составило труда вычислить истинностные значения конъюнкции $((A \vee B) \& \neg(A \& B))$. Полученный результат записан в предпоследнем столбце таблицы под главной связкой &. Сравнивая его со столбцом для ∇, убеждаемся, что эти столбцы совпадают. Следовательно, можно определить формулу $(A \nabla B)$ посредством формулы $((A \vee B) \& \neg(A \& B))$. Эти формулы, отличаясь синтаксически, с семантической точки зрения означают ровно одно и то же. Полученный результат хорошо согласуется с интуицией: ведь исключающая дизъюнкция $(A \nabla B)$ говорит, что либо A, либо B, но не A и B вместе.

Здесь мы впервые сталкиваемся с возможностью одни логические связки определять через другие. Связка ∇ была определена посредством формулы, содержащей связки $\vee$, & и $\neg$. В дальнейшем нам еще предстоит убедиться в важности и пользе определений одних связок через другие.

Построим таблицу истинности для формулы $(p_1 \& ((q \to \neg p) \vee p_1))$ из предыдущего параграфа. Впервые тут не две, а три исходных атомарных подформулы, что ведёт к усложнению таблицы, поскольку три высказывания порождают восемь исходных альтернатив. Главной связкой формулы является &, поэтому столбец под ней будет результирующим (он выделен полужирным шрифтом). Столбцы таблицы вычисляем, следуя шагам построения данной формулы.

p_1	q	p	(p_1	&	((q	→	¬p)	∨	p_1))
и	и	и	и	**и**	и	л	л	и	и
и	и	л	и	**и**	и	и	и	и	и
и	л	и	и	**и**	л	и	л	и	и
и	л	л	и	**и**	л	и	и	и	и
л	и	и	л	**л**	и	л	л	л	л
л	и	л	л	**л**	и	и	и	и	л
л	л	и	л	**л**	л	и	л	и	л
л	л	л	л	**л**	л	и	и	и	л

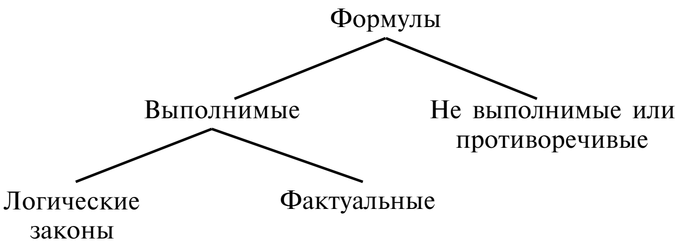
Полученный результат обескураживает: формула $(p_1 \& ((q \to \neg p) \vee p_1))$ имеет тот же результирующий столбец, что и пропозициональная переменная p_1!

Рассмотрим следующую простую таблицу истинности в предположении, что A – формула.

A	(A → A)	¬(A → A)
и	и	л
л	и	л

Во всех ранее рассмотренных таблицах формулы в результирующих столбцах принимали то значение «истина», то значение «ложь». Здесь мы впервые сталкиваемся со случаем, когда формулы принимают либо только значение «истина», либо только значение «ложь».

Если в результирующем столбце таблицы истинности формулы A имеется только значение «истина», то формула A называется *логическим законом*. Если в результирующем столбце таблицы истинности формулы A имеется только значение «ложь», то формула A называется *противоречивой* или *противоречием*. Если в результирующем столбце таблицы истинности формулы A имеется хотя бы одно значение «истина», то формула A называется *выполнимой*. Если в результирующем столбце таблицы истинности формулы A имеется хотя бы одно значение «истина» и хотя бы одно значение «ложь», то формула A называется *фактуальной*. В соответствии с данными определениями, имеем следующую классификацию формул логики высказываний.



Каждая формула логики высказываний либо выполнима, либо противоречива. Выполнимые, в свою очередь, делятся на законы и фактуальные формулы.

Логику в первую очередь интересуют законы, поэтому для законов вводится специальное обозначение. Вместо длинного «А – логический закон» условимся иногда писать $\models$ A. Например, $\models (p \to p)$. Если A – формула, то $\models (A \to A)$. И т.д.

Введём ещё одно соглашение. Если формула имеет вид (A # B) и её не предполагается использовать в дальнейших построениях в качестве подформулы, иногда будем опускать внешние скобки: сокращая запись, вместо (A # B) разрешим писать A # B. Это не модификация определения формулы, а просто соглашение о сокращённой записи формул.

В отличие от традиционной логики, сумевшей установить лишь конечное и при том весьма ограниченное количество законов, уже в логике высказываний (не говоря о более сложной логике понятий) мы сталкиваемся с *бесконечным* числом законов. Ниже мы приводим перечень некоторых важных для теории и практики законов. Сразу оговоримся, что этот перечень дан для иллюстрации, поэтому не следует думать, что он исчерпывающий. Попытайтесь самостоятельно убедиться посредством построения таблиц истинности, что приведённые формулы действительно являются логическими законами.

Пусть A, B и C – формулы. Тогда следующие формулы являются законами логики высказываний.

1. $(A \to A)$ – закон тождества;
2. $\neg(A \,\&\, \neg A)$ – закон непротиворечия;
3. $(A \vee \neg A)$ – закон исключённого третьего;
4. $(A \,\&\, A) \leftrightarrow A$ – закон идемпотентности конъюнкции;
5. $(A \vee A) \leftrightarrow A$ – закон идемпотентности дизъюнкции;
6. $(\neg\neg A \to A)$ – закон снятия двойного отрицания;
7. $(A \to \neg\neg A)$ – закон введения двойного отрицания;

8. $(A \& B) \leftrightarrow (B \& A)$ – закон коммутативности конъюнкции;
9. $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$ – закон коммутативности дизъюнкции;
10. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ – закон отрицания антецедента;
11. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ – закон утверждения консеквента;
12. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ – закон контрапозиции;
13. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ – закон обратной контрапозиции;
14. $(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$ – закон Пирса;
15. $((A \& B) \& C) \leftrightarrow (A \& (B \& C))$ – закон ассоциативности конъюнкции;
16. $((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$ – закон ассоциативности дизъюнкции;
17. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ – закон транзитивности импликации;
18. $(A \& (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \& B) \vee (A \& C))$ – закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции;
19. $(A \vee (B \& C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \& (A \vee C))$ – закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции;
20. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ – закон самодистрибутивности импликации.

Некоторые из приведённых в списке законов читателю уже известны – это первые три закона традиционной логики. Некоторые другие законы напоминают знакомые законы арифметики. Законы коммутативности соответствуют $(x \times y) = (y \times x)$ и $(x + y) = (y + x)$. Законы ассоциативности соответствуют $((x \times y) \times z) = (x \times (y \times z))$ и $((x + y) + z) = (x + (y + z))$. Конъюнкцию ещё называют логическим умножением, а дизъюнкцию – логическим сложением (по причинам, о которых речь пойдёт ниже). В этом смысле закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции соответствует закону дистрибутивности умножения относительно сложения: $(x \times (y + z)) = ((x \times y) + (x \times z))$. Однако арифметическая аналогия с дистрибутивностью дизъюнкции относительно конъюнкции не проходит: $(1 + (1 \times 1)) \neq ((1 + 1) \times (1 + 1))$.

Специальные названия имеют лишь немногие логические законы. Но это не означает, что остальные законы хуже или вообще не нужны. В логике мы постоянно сталкиваемся с различными не имеющими названий законами, которые важны для рассуждений. Например, выше было дано определение исключающей дизъюнкции ∇ через $\vee$, $\&$ и $\neg$. Тот же результат можно записать в более компактной форме, используя связку эквиваленции: $(A \nabla B) \leftrightarrow ((A \vee B) \& \neg(A \& B))$. Построим таблицу для последней формулы, воспользовавшись тем, что столбцы её главных подформул уже вычислены.

A	B	$(A \nabla B) \leftrightarrow ((A \vee B) \& \neg(A \& B))$
и	и	л **и** л
и	л	и **и** и
л	и	и **и** и
л	л	л **и** л

Результирующий столбец формулы $(A \nabla B) \leftrightarrow ((A \vee B) \& \neg(A \& B))$ выделен полужирным шрифтом и располагается под главной связкой этой формулы – эквиваленцией. Так как в этом столбце встречается только значение «истина», перед нами очередной логический закон.

Ещё один результат состоял в том, что в таблице истинности для формулы $(p_1 \& ((q \rightarrow \neg p) \vee p_1))$ её результирующий столбец совпал с со столбцом для подформулы p_1. Это означает, что эквиваленция $(p_1 \& ((q \rightarrow \neg p) \vee p_1)) \leftrightarrow p_1$ – снова логический закон.

Если эквиваленция $(A \leftrightarrow B)$ является логическим законом, то в этом случае говорят, что формулы A и B *эквивалентны.*

Логика устанавливает не только законы, но и *связи* между законами. Первый пример такой связи относится к импликации и её главным подформулам. Если $\models A$ и $\models (A \rightarrow B)$, то $\models B$. Докажем это от противного. Допустим, A и $(A \rightarrow B)$ законы, а B – нет . Тогда найдется строка в таблице истинности для формул A, B и $(A \rightarrow B)$, в которой B будет ложно. Но A истинна в каждой строке данной таблицы, т.к. A – логический закон. Тогда в строке, в которой B ложна и A истинна, импликация $(A \rightarrow B)$ должна принять значение «ложь», в противоречии с тем, что $(A \rightarrow B)$ – логический закон.

Второй пример. Допустим, формула A содержит пропозициональные переменные $p_1, p_2, ..., p_n$ и A является логическим законом. Тогда формула A′, полученная из A подстановкой формул $A_1, A_2, ..., A_n$ вместо переменных $p_1, p_2, ..., p_n$ соответственно, также будет логическим законом. В противном случае формула A′ будет ложной в какой-то строке m своей таблицы истинности. В строке m формулы $A_1, A_2, ..., A_n$ примут определённые значения: $A_1 = v_1, A_2 = v_2, ..., A_n = v_n$, где каждое v_i есть либо истина, либо ложь. Переменные $p_1, p_2, ..., p_n$, входящие в A, принимали *все* возможные комбинации истинностных значений. Значит, в некоторой строке k таблицы для формулы A было $p_1 = v_1$, $p_2 = v_2$, ..., $p_n = v_n$. Но при вычислении значения формулы A′ *после* того, как значения подформул A_1, A_2, ..., A_n вычислены, мы будем применять те же самые логические связки и в той же последовательности, что и в случае формулы A. Тогда и результат должен быть тем же самым! Следовательно, если A′ ложна в строке m, то A должна быть ложна в строке k. Это противоречиво, так как по допущению A — логический закон, и в строке k A истинна. Противоречие получилось из-за предположения, что $\not\models$ A′. Значит, $\models$ A′, что и требовалось доказать.

Для большей ясности отметим, что обратная процедура, состоящая в замене каких-либо подформул формулы A пропозициональными переменными, не сохраняет свойства «быть логическим законом». Так, формула $(p \to (q \to q))$, как нетрудно проверить, является логическим законом. Но если мы подформулу $(q \to q)$ заменим на переменную q, то получится формула $(p \to q)$, которая, ясное дело, законом не является. Этот результат обусловлен тем обстоятельством, что подформула $(q \to q)$ принимает в каждой строке таблицы истинности формулы $(p \to (q \to q))$ только значение «истинно», тогда как подформула q формулы $(p \to q)$ будет принимать то значение «истинно», то значение «ложно». Подытоживая сказанное, отметим, что замена пропозициональной переменной формулой может сократить число возможных комбинаций истинностных значений, в то время как обратная замена может увеличить число таких комбинаций.

Жёсткая взаимосвязь существует также между законами и противоречивыми формулами: $\models$ A тогда, и только тогда, когда $\neg$A противоречиво. Действительно, отрицание закона истину в результирующем столбце превратит в ложь, породив противоречие, а ложь в каждой строке под отрицанием в $\neg$A означает, что само A истинно в каждой строке. Обратно, A противоречиво тогда, и только тогда, когда $\models \neg$A. Обоснование аналогично.

Что касается фактуальных формул, то отрицание фактуальной формулы вновь приведёт к фактуальной формуле, в которой вместо «истинно» будет стоять «ложно», а вместо «ложно» — «истинно». Фактуальными формулы названы потому, что их истинность или ложность зависит от истинности или ложности простых высказываний, которые мы можем подставлять вместо пропозициональных переменных этих формул. А истинность или ложность простых высказываний зависит от фактического положения дел. Поэтому и истинностное значение такого рода формул в конечном счёте зависит от конкретных фактов.

Напротив, логические законы и противоречия от конкретных фактов не зависят! Принимаем ли мы в качестве p истинное высказывание «Снег бел» или ложное высказывание «Снег чёрен», закон $(p \to p)$ останется истинным, а противоречие $\neg(p \to p)$ – ложным. Более того, даже если в формулах вида $(A \to A)$ и $\neg(A \to A)$ вместо A взять сам закон $(p \to p)$ или его противоречивое отрицание $\neg(p \to p)$, всё равно $(A \to A)$ будет всегда истинно, а противоречие $\neg(A \to A)$ будет всегда ложно.

Мы уже знаем, что логика – это наука о правильных рассуждениях. Но понятие правильного рассуждения напрямую связано с понятием истины, а понятие истины – с соответствием действительности. Древнегреческий философ Платон утверждал, что «тот, кто говорит о вещах в соответствии с тем, каковы они есть, говорит истину, тот же, кто говорит о них иначе – лжет». Приведенное высказывание Платона в первом приближении верно схватывает основные характеристики истины и ее противоположности – лжи. Во-первых, истина и ложь – это отношения между тем, что утверждается о положении дел в вещах, и самими положениями дел как они есть. Во-вторых, если отношение между утверждением и положением дел в вещах является отношением соответствия, то утверждение следует считать истинным; в противном случае оно ложно.

Поэтому неудивительно, что логика, оперирующая понятиями истины и лжи, также имеет отношение к действительности. Правда, это своеобразное отношение. Логика, в отличие от большинства других наук, говорит нам не о том, что есть или чего нет, а о том, что обязательно есть, что только может быть (а может и не быть), а чего быть вообще не может ни при каких обстоятельствах.

Простой пример. Рассмотрим высказывание (а) «*Если упал в воду, то намок*». Это истинно. Предположим, истинно также, что (б) «*Упал в воду*». Тогда с неизбежностью истинно, что (в) «*Намок*». Почему? – Потому, что если обозначить (б) и (в) буквами p и q соответственно, переводом (а) будет импликация $(p \to q)$. Итак, пусть p истинна и $(p \to q)$ истинна. Допустим, что q ложна. Тогда при истинной p и ложной q импликация $(p \to q)$ окажется ложной, в противоречии с предположением, что она истинна. Значит, q не может быть ложной, т.е. q истинна.

Иными словами, истинность (а) и (б) *гарантирует* нам истинность (в). Но если известно, что кто-то намок, т.е. истинно (в), то из истинности (а) и (в) уже нельзя гарантированно извлечь истинность (б). В самом деле, если кто-то намок, то совсем не обязательно, что он упал в воду. Быть может, он попал под дождь или что-нибудь еще. Действительно, если формулы $(p \rightarrow q)$ и q истинны, то p может оказаться как истинной, так и ложной.

Что же в данном случае логика говорит нам о действительности? – То, что мы живем в мире, где одно и тоже событие может вызываться *различными* причинами. Однако наличие причины в нашем мире с неизбежностью вызывает наступление *определенного* следствия. Падение в воду неизбежно вызывает намокание. Но вот простуду вызовет не обязательно, поэтому утверждать высказывание «*Если упал в воду, то простудился*» – значит пойти наперекор фактам, в соответствие которыми между падением в воду и простудой закономерной причинной связи нет.

Мы можем представлять себе миры, в которых это не так. Например, вообразим мир, в котором любое следствие вызывается не многими, а лишь одной определенной причиной. В таком мире не только истинность (а) и (б) влечет истинность (в), но и истинность (а) и (в) неизбежно обуславливает истинность (б), чего в действительном мире нет.

Получается, что принимая логику, мы принимаем и определенные предположения о том, как устроен мир. Эти предположения принято называть *онтологическими предпосылками*. Связанные с логикой онтологические предпосылки носят предельно общий характер. Исследованием предельно общих характеристик универсума занимается философия, в силу чего логика считалась и считается неотъемлемой частью философии, одной из основных философских дисциплин. Логика, однако, ограничена рамками *строгих* рассуждений, что отнюдь не свойственно всей философии вообще. Поэтому логика не исчерпывает всей философии, являясь лишь ее собственной частью, хотя и важнейшей.

Точнее, логика не столько *зависит* от каких бы то ни было онтологических предпосылок, как это нередко принято утверждать, но скорее сама *создает* онтологические предпосылки. Формируя логику, мы формируем и принимаемые нами онтологические предпосылки. Эти предпосылки, в частности, фиксируются при помощи логических законов. Приведённое только что рассуждение укладывается в схему закона $((A \to B) \& A) \to B$, тогда как схема $((A \to B) \& B) \to A$ хоть и не противоречива, но является не законом, а всего лишь фактуальной формулой.

§4. О совместимости высказываний

Таблицы истинности позволяют решать вопросы, связанные с логической совместимостью высказываний. Рассмотрим высказывания

(*) «У больного пневмония или грипп»;

(**) «У больного пневмония и грипп»;

(***) «Неверно, что у больного пневмония».

Высказывания (*), (**) и (***) составлены из простых высказываний «У больного пневмония" и «У больного грипп». Обозначим первое из этих высказываний символом p, второе — символом q. Тогда (*) есть $p \vee q$, (**) есть $p \& q$ и (***) есть $\neg p$. Построим следующую таблицу истинности.

p	q	$p \vee q$	$p \& q$	$\neg p$
и	и	и	и	л
и	л	и	л	л
л	и	и	л	и
л	л	л	л	и

Из таблицы видно, что высказывания (*) и (**) принимают вместе значение «и», когда p = и и q = и. Высказывания (*) и (***) вместе истинны, когда p = л и q = и. Но в таблице истинности нет ни одной строки, в которой высказывания (**) и (***) вместе истинны.

Приведенный пример представляет из себя частный случай более общей ситуации. Пусть дано множество высказываний $M = \{A_1, A_2, A_3, ..., A_n\}$. Иными словами, M состоит из высказываний A_1, A_2, A_3 и т.д. — вплоть до высказывания A_n, где n — какое-либо положительное целое число. Предполагается, что все высказывания из M различны. Выпишем все простые высказывания, из которых составлены высказывания из M. В частности, может случиться так, что какое-то высказывание A_i из M будет простым и попадет в данный перечень. Допустим, в результате получится список простых высказываний $П_1$, $П_2$, $П_3$, ..., $П_m$. (Здесь m – положительное целое число, равное количеству элементов списка.) Составим таблицу истинности следующего вида.

$П_1$	$П_2$	$П_3$	......	$П_m$	A_1	A_2	A_3	......	A_n
и	и	и	......	и	v	v	v	......	v
л	л	л	......	л	v	v	v	......	v

В этой таблице символ "v" (от англ. value – значение) указывает, что должно стоять либо "и", либо "л". Что именно конкретно – в общем случае определить заранее нельзя. Что касается простых высказываний из списка $П_1$, ... , $П_m$, то каждая строка таблицы содержит какое-либо распределение истинностных значений "и" и "л" между высказываниями из этого списка. Подразумевается, что все возможные распределения истинностных значений между высказываниями из данного списка представлены в таблице – от случая, когда все высказывания $П_1$, ..., $П_m$ истинны, до случая, когда все они ложны. Важно подчеркнуть, что ни одна из возможных комбинаций истинностных значений высказываний $П_1$, ..., $П_m$ не должна быть пропущена. Например, возможен случай, когда $П_1$ = и, $П_2$ = л, $П_3$ = и, $П_4$ = л и т.д. – и этот случай должен иметься в рассматриваемой таблице. Если таблица построена в соответствии с вышеперечисленными требованиями, то будем говорить, что это таблица истинности для множества высказываний M.

После сделанных предварительных построений дадим следующее определение. Пусть M – это множество высказываний $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_n\}$. M называется ***совместимым***, если в таблице истинности для множества высказываний M имеется по крайней мере одна строка такая, что A_1 = и, A_2 = и, A_3 = и, ..., A_n = и.

Вернемся к рассмотренному выше конкретному примеру. Была построена таблица истинности для множества высказываний $M = \{(p \vee q), (p \& q), \neg p\}$. Из этой таблицы видно, что данное множество M не является совместимым. Не является совместимым также множество $M' = \{(p \& q), \neg p\}$. Но множества $M'' = \{(p \vee q), (p \& q)\}$ и $M''' = \{(p \vee q), \neg p\}$ будут совместимыми, как следует из той же самой таблицы.

При анализе множеств полезным оказывается понятие включения одного множества в другое. Пусть множество S' таково, что каждый объект из S' оказывается вместе с тем объектом из множества S. Тогда говорят, что множество S' *включается* в множество S и пишут $S' \subset S$. Например, верны соотношения $M' \subset M$, $M'' \subset M$, $M''' \subset M$. Отметим, что верно также $M \subset M$.

Сделаем отступление от основной линии изложения и кратко обсудим особенности используемых в логике понятий. Стиль мышления в точном естествознании и математике – *аналитический*, основанный на логике; стиль мышления типичного гуманитария условно можно назвать *герменевтическим*, имея в виду его стремление к пониманию интуитивного смысла произнесённого или прочитанного. Эта особенность мыслительной деятельности гуманитария способна сыграть с ним злую шутку при попытке усвоить логико-аналитическую информацию. При первом ознакомлении смысл логико-аналитических манипуляций может быть интуитивно непонятным. Например, в логике четко различают понятия *принадлежности* (обозначается символом $\in$) множества к другому множеству, и понятие *включения* ($\subset$) одного множества в другое множество. Скажем, множество «греки» принадлежит множеству «народы» и включается во множество «люди», т.е. (греки $\in$ народы) и (греки $\subset$ люди). Получив эту информацию, гуманитарий начинает мучительно размышлять, в чем же разница в смыслах между понятиями принадлежности и включения. Независимо от того, найдет он эту разницу или нет, его понимание ситуации будет неадекватным именно потому, что опирается на интуицию. Факт несоответствия будет обнаружен весьма быстро по мере продвижения по логическому тексту, что может привести гуманитария к мало приятным переживаниям и выводу об отсутствии у него логических и математических способностей.

Иначе действует человек аналитического склада. Ему для первоначального понимания достаточно овладеть *формальными* различиями между понятиями. Хотя бы некоторые формальные различия должны быть заданы с момента введения соответствующих понятий и должны приниматься при сознательно отключенной интуиции, которая может помешать правильному усвоению формы. В нашем случае одно из формальных различий таково: из посылок *А включается в В* и *В включается в С* **следует**, что *А включается в С*, т.е. из ($A \subset B$) и ($B \subset C$) вытекает, что ($A \subset C$), а из посылок *А принадлежит В* и *В принадлежит С* **не**

следует, что *А принадлежит С*, т.е. ($A \in B$) и ($B \in C$) не обязательно влекут ($A \in C$). Для краткости говорят, что включение *транзитивно* (как бы осуществляется транзит от А к С через В), а принадлежность *не транзитивна* (поскольку транзит здесь имеет место не всегда). Разрешение транзита или его запрещение носит формальный характер и никак не связано с интуитивным смыслом слов «включение» и «принадлежность». Можно было бы поменять роли этих слов посредством замены слова «включение» словом «принадлежность», а слова «принадлежность» словом «включение», так что проблема не в словах.

Вернёмся к уже рассматривавшимся двум рассуждениям:

(а) Греки – люди, люди – смертны, следовательно, греки – смертны;

(б) Сократ – грек, греки – народ, следовательно, Сократ – народ.

Рассуждение (а) правильно, а рассуждение (б) не правильно, несмотря на внешнее сходство между (а) и (б). На самом деле в (а) связка «–» обозначает включение $\subset$, а в (б) та же самая связка «–» обозначает принадлежность $\in$. В речи и в текстах на естественном языке эти различия могут быть скрыты, как в приведенном примере, под одной и той же знаковой формой. Но если сделать различия явными, то сразу будет понятно, можно или нет получить из посылок заключение:

(а′) Множество греков включаются во множество людей, люди включаются во множество смертных, следовательно (поскольку включение транзитивно!), греки включаются во множество смертных;

В краткой записи: (греки $\subset$ люди, люди $\subset$ смертные, следовательно, греки $\subset$ смертные);

(б′) Сократ принадлежит множеству греков, греки принадлежат множеству народов, но отсюда не следует (поскольку принадлежность не транзитивна!), что Сократ принадлежит множеству народов;

В краткой записи: (Сократ $\in$ греки, греки $\in$ народ, но это не означает, что Сократ $\in$ народ).

Мы имеем дело отнюдь не с частным случаем. Аналогичная ситуация возникает в самых разнообразных вариантах, например, с равенством и неравенством. Каждый знает, что $A = B$ и $B = C$ влечет, что $A = C$. Таким образом, равенство, как и включение, транзитивно. Но из $A \neq B$ и $B \neq C$ не вытекает, что

$A \neq C$. Например, $2\times2 \neq 5$, $5 \neq 4$, но переход к заключению $2\times2 \neq 4$ будет ошибкой. Значит, неравенство, как и принадлежность, не транзитивно.

Таким образом, суть заключается не в отсутствии логических или математических способностей, а в неправильном подходе гуманитария к аналитической информации. Ему надо, особенно на первом, ознакомительном, этапе, действовать формально, неуклонно следуя полученным инструкциям и не пытаться сразу адекватно понять глубинный смысл своих действий. Это может быть противно привычкам гуманитарного мышления, но иного пути постижения аналитического знания нет. Полное понимание придёт позже, после основательного усвоения необходимых формальных манипуляций. Тогда как бы сами собой придут мысли о смысле всего этого в целом, о достоинствах и недостатках этого целого и т.д. Короче говоря, проявится способность к творческой аналитической работе. Своеобразное запаздывание включения творческого воображения в аналитической сфере служит еще одним препятствием для овладения ею гуманитарием, привыкшим в своей области творить буквально с первого момента погружения в текст. Но все эти препятствия при правильном их понимании и при наличии желания вполне преодолимы и для человека с гуманитарным складом ума.

Надеемся, что сделанные выше замечания правильно сориентируют читателя, направив его внимание на аналитический аспект используемых логических понятий и рассуждений.

Теперь продолжим обсуждение проблемы совместимости высказываний. Множества высказываний, не являющиеся совместимыми (или, короче, *несовместимые* множества высказываний), подчиняются следующей простой закономерности. Если множество высказываний S' включается в множество высказываний S и S' является несовместимым, то несовместимым будет также и множество высказываний S. Короче, если $S' \subset S$ и S' несовместимо, то и S несовместимо. Например, из несовместимости M' и с учётом $M' \subset M$, получаем, что M несовместимо.

Действительно, если какие-то высказывания оказались несовместимыми, то добавление к ним других высказываний не может привести к строке в таблице истинности, в которой несовместимые ранее высказывания окажутся вместе истинными. Ведь понятие несовместимости в том и состоит, что такой строки не существует. Поэтому, если при анализе какого-либо множества высказываний будет обнаружено, что оно включает в себя несовместимое множество высказываний, дальнейший анализ первоначального множества на предмет его совместимости можно не проводить.

Так, множество высказываний вида {A, ¬A}, как нетрудно проверить, несовместимо. Поэтому любое множество высказываний, включающее в себя множество указанного вида, также будет несовместимым.

В отношении совместимости действует обратная закономерность. Если множество высказываний S совместимо и $S' \subset S$, то S' также будет совместимым. В самом деле, если бы оказалось, что S' несовместимо, то S также было бы несовместимым, в противоречии с условием.

Процедура установления совместимости множества высказываний важна в практическом плане, ею часто пользуются при анализе имеющейся информации. Поэтому необходимо уметь правильно пользоваться данной процедурой. Рассмотрим следующий пример неверного решения вопроса о совместимости. Пусть имеется множество высказываний S = {"NN совершил преступление", "NN — законопослушный гражданин"}. Оба высказывания, входящие в S, просты. Обозначим их буквами p и q соответственно и построим для них таблицу истинности.

p	q
и	и
и	л
л	и
л	л

Поскольку в первой строке таблицы высказывания p и q оказываются вместе истинными, постольку множество S совместимо. Однако факт совершения преступления несовместим с законопослушанием. В чем же ошибка проведенного рассуждения? Она состоит в упущении различия между *фактической* и *логической* совместимостью. В соответствии с фактами, множество высказываний S должно быть признано несовместимым. Но формулы p и q с логической точки зрения совместимы.

Важно иметь в виду, что *из фактической несовместимости не следует логическая несовместимость*. Но обратное соотношение оказывается верным: *логическая несовместимость влечет фактическую несовместимость*. (С другой стороны, фактическая совместимость множества высказываний означает, что это множество совместимо и с логической точки зрения.) Проанализированное выше несовместимое множество M' = {(p & q), ¬p} логически несовместимо. Поэтому невозможно найти такие высказывания p и q о фактах, которые сделали бы это множество совместимым.

Ввиду указанного различия между логической и фактической несовместимостью необходимо уметь правильно подготовить исходное множество высказываний. Знания о фактической несовместимости следует представлять в логической форме. В рассматриваемом примере упущена информация о том, что если кто-то совершил преступление, то он не является законопослушным гражданином.. С учетом этой информации исходное множество приобретает следующий вид: S' = {"NN совершил преступление", "NN — законопослушный гражданин ", "Если NN совершил преступление, то неверно, что NN — законопослушный гражданин"}.

Представляя S' в символьном виде, имеем: S' = {p, q, (p → ¬q)}. Проверим совместимость множества высказываний S'.

p	q	(p → ¬q)
и	и	л
и	л	и
л	и	и
л	л	и

Построенная таблица показывает, что множество высказываний S' логически несовместимо. Следовательно, фактически оно также несовместимо.

Таким образом, *необходимо знания о фактической несовместимости выражать так, чтобы соответствующие высказывания были логически несовместимыми*. Эта цель достигается путем расширения исходного множества высказываний с учетом знаний о зависимостях между высказываниями. Тем самым осуществляется отображение фактической информации в логической форме.

Мы можем не знать, совместимо или нет интересующее нас множество высказываний о фактах. Чтобы решить этот вопрос, следует опять-таки расширить это множество высказываний, включив в него утверждения о связях между исходными высказываниями. Например, если в число первоначальных высказываний попали утверждения A, B и C и известно, что $(A \to (B \lor \neg C))$, то последнее высказывание также необходимо ввести в анализируемое множество.

Если полученное в результате множество высказываний о фактах и зависимостях между фактами оказалось несовместимым, то это означает, что либо какие-то фактические данные ошибочны, либо некоторые утверждения о связях между фактами неверны. Допустим, имеются утверждения о фактах A, B, C и зависимостях $(A \to (B \lor \neg C))$, $(B \to (\neg A \lor \neg C))$. Проанализируем на предмет совместимости множество высказываний $S = \{A, B, C, (A \to (B \lor \neg C)), (B \to (\neg A \lor \neg C))\}$.

A	B	C	(A	→	(B	∨	¬C))	(B	→	(¬A	∨	¬C))
и	и	и	и	и	и	и	л	и	л	л	л	л
и	и	л	и	и	и	и	и	и	и	л	и	и
и	л	и	и	л	л	л	л	л	и	л	л	л
и	л	л	и	и	л	и	и	л	и	л	и	и
л	и	и	л	и	и	и	л	и	и	и	и	л
л	и	л	л	и	и	и	и	и	и	и	и	и
л	л	и	л	и	л	л	л	л	и	и	и	л
л	л	л	л	и	л	и	и	л	и	и	и	и

В данной таблице результирующие истинностные значения для высказываний $(A \to (B \lor \neg C))$ и $(B \to (\neg A \lor \neg C))$ стоят под знаком $\to$, т.к. вначале вычисляются значения отрицаний $\neg C$ и $\neg A$, затем значение дизъюнкций $(B \lor \neg C)$ и $(\neg A \lor \neg C)$ и лишь в последнюю очередь значения импликаций.

Можно было бы не выписывать всю таблицу истинности для множества S полностью, поскольку для рассматриваемого примера вопрос о совместимости множества S решается в первой строке таблицы. Из нее видно, что высказывания из S не могут быть одновременно истинны, так что множество S несовместимо. Несовместимость возникает из-за высказывания $(B \to (\neg A \lor \neg C))$, т.е. утверждения о том, что наличие факта B влечет отсутствие или факта A, или факта C. Возможно, именно это утверждение является ложным. Однако, если оно все-таки истинно, то в таком случае факты, описанные высказываниями A, B и C, не могут появляться вместе. Логика помогает устанавливать наличие ошибки в исходных высказываниях, но вопрос о том, вкралась ошибка в фактические данные или в утверждения о зависимостях между фактами сформулирован неверно – этот вопрос решается в ходе вне логических исследований.

Рассматриваемая таблица истинности была построена полностью для иллюстрации того обстоятельства, что каждое новое простое высказывание увеличивает количество строк таблицы вдвое. Действительно, если имеется лишь одно высказывание А, то для него есть две логические возможности. Для двух высказываний А и В этих возможностей четыре. Три высказывания А, В и С приводят к восьми логически возможным комбинациям их истинностных значений (как это было видно на примере только что построенной таблицы). Попробуйте самостоятельно убедиться в том, что для исходных высказываний А, В, С и D существует 16 различных способов приписать им истинностные значения.

А сколько строк будет в таблице, содержащей произвольное число исходных высказываний n? Допустим, нам известно, что для n-1 число строк таблицы равно m. Добавление n-го исходного высказывания A_n приводит к ситуации, которую схематически можно изобразить следующим образом.

1 строка	1 строка и при этом A_n = и
	1 строка и при этом A_n = л
2 строка	2 строка и при этом A_n = и
	2 строка и при этом A_n = л
....	
....	
m строка	m строка и при этом A_n = и
	m строка и при этом A_n = л

Для каждой из прежних m строк комбинаций истинностных значений появляется две новые возможности: либо выражение A_n окажется истинным, либо оно будет ложным. Таким образом, общее количество возможностей (или строк таблицы) увеличивается вдвое.

Теперь ответим на вопрос о количестве строк таблицы в зависимости от числа простых высказываний в общем виде. Обратимся для этого к методу рассуждения по математической индукции. Мы видели, что если число исходных высказываний равно 1, 2 или 3, то число строк в таблице равно 2^1, 2^2, 2^3 соответственно. Допустим, нам удалось показать, что для числа n-1 исходных высказываний число строк таблицы равно 2^{n-1}. Как вытекает из только что рассмотренной схемы, добавление нового n-го высказывания увеличивает число строк таблицы вдвое. Следовательно, для n простых высказываний число строк будет $2^{n-1} \times 2 = 2^n$.

Поскольку n было выбрано произвольным, рассуждение верно для любого n. Предположим, что это не так. Другими словами, допустим, что существуют такие целые положительные числа, для которых число строк таблицы не подчиняется найденной закономерности. Тогда среди этих чисел будет наименьшее. Обозначим его через n. В соответствии с предположением, если число простых высказываний равно этому n, то количество строк таблицы не равно 2^n. Число n не может равняться 1, 2 или 3, поскольку для этих чисел закономерность верна. Следовательно, $n>3$. Но n – наименьшее число, нарушающее закономерность. Отсюда вытекает, что для n-1 закономерность выполняется, т.е. для n-1 простых высказываний количество строк таблицы равно 2^{n-1}. Однако отсюда следует в соответствии с выше построенной схемой, что при добавлении нового n-го высказывания количество строк возрастёт вдвое, так что при n простых высказываниях число строк будет равным $(2^{n-1} \times 2) = 2^n$, в противоречии с предположением.

Итак, найденная закономерность выполняется для любого n. Теперь легко подсчитать, сколько строк должна иметь таблица истинности, если известно число исходных высказываний. При $n = 4$ число строк равно $2^4 = 16$, при $n = 5$ число строк равно $2^5 = 32$ и т.д. Как мы видим, число строк таблицы растет очень быстро с незначительным увеличением исходного количества высказываний. Например, при $n = 10$ число строк будет $2^{10} = 1024$. Нетрудно составить сложное высказывание, содержащее 10 простых, но выписывать таблицу с более, чем 1000 строк – дело неблагодарное.

Отсюда вытекает практическая рекомендация: следует стремиться всячески ограничивать число исходных простых высказываний. Но и при составлении сравнительно небольших таблиц, даже если известно, сколько строк они должны содержать, не всегда легко выписать все возможные комбинации истинностных значений, если при этом не пользоваться определенными стандартными приемами. Можно рекомендовать следующий метод построения строк для простых высказываний. Пусть число этих высказываний равно n. Следовательно, число строк в таблице должно быть равно 2^n. Выпишем имеющиеся исходные высказывания в любом порядке. Получим список A_1, A_2, ..., A_n. В столбце для A_1 напишем подряд 2^{n-1} знаков "и", затем столько же знаков "л". Т.к. $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$, то столбец для A_1 закончен. Для A_2 столбец строится так: 2^{n-2} значений "и", затем столько же значений "л", затем снова 2^{n-2} значений "и" и снова 2^{n-2} значений "л". Поскольку $2^{n-2} + 2^{n-2}+2^{n-2} + 2^{n-2} = 2n$, столбец для A_2 закончен. Далее чередуем блоки "и" и "л" по 2^{n-3}, 2^{n-4} и т.д. до тех пор, пока для A_n не получим чередование значений "и" и "л" через одну строку.

Применим предложенный метод к случаю n = 4. Получим следующий результат.

A	B	C	D
и	и	и	и
и	и	и	л
и	и	л	и
и	и	л	л
и	л	и	и
и	л	и	л
и	л	л	и
и	л	л	л
л	и	и	и
л	и	и	л
л	и	л	и
л	и	л	л
л	л	и	и
л	л	и	л
л	л	л	и
л	л	л	л

Порядок, в котором берутся исходные высказывания, на самом деле несущественен. Например, расположив высказывания в неалфавитном порядке D, C, B A и построив для них таблицу истинности по указанному методу, во второй строке будем иметь комбинацию D = и, C = и, B = и и A = л. Этот результат отличен от второй строки перед этим построенной таблицы, однако важно не то, в какой строке таблицы встретилась данная комбинация, а то, не была ли она пропущена. Проверим: в девятой строке приведенной в тексте таблицы имеется именно эта комбинация, что и требовалось. Более того, теоретически не важен и порядок строк таблицы. Например, 16 строк построенной выше таблицы можно было бы выписать в обратном порядке, начав с

л	л	л	л

Однако для облегчения сравнения результатов табличных вычислений желательно придерживаться единообразного метода построения таблиц истинности. Условимся, что таким единым методом для нас станет вышеописанный порядок выписывания строк, причём исходные высказывания будем брать в алфавитном порядке, а не в той последовательности, в которой они встречаются в формулах.

§5. Логическое следование

Одной из центральных проблем логики является вопрос о том, что такое логическое следование из одних утверждений других. Интуитивно мы понимаем, что, например, из высказываний "Петя находится в институте или у родителей" и "У родителей Пети нет" логически следует, что "Петя находится в институте". Но какой логический вывод можно сделать, если к первым двум высказываниям добавить "В институте Пети тоже нет"? Может быть, отсюда следует утверждение "Неверно, что Петя находится в институте или у родителей"? А высказывание "Неверно, что Пети нет в институте" следует из данных трех утверждений или не следует? Вновь интуитивных представлений о логических связях оказывается недостаточно. Требуется установление четкой и однозначно определенной процедуры для решения вопроса о том, имеет место отношение логического следования между высказываниями или следования нет.

Пусть дано множество высказываний M = $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Будем говорить, что *из множества* M *(или из высказываний* A_1, A_2, ..., A_n*)* ***логически следует*** *высказывание* B*, если всякий раз,* *когда в таблице истинности для* M' = {A_1, A_2, ..., A_n, B} *высказывания* A_1, A_2, ..., A_n *истинны, высказывание* B *также будет истинно.* Для обозначения логического следования будем применять запись M $\models$ B (или A_1, A_2, ..., A_n $\models$ B).

Множество *M* здесь играет роль множества допущений или множества посылок, а последовательность A_1, A_2, ..., A_n − это последовательность допущений или последовательность посылок. В свою очередь, высказывание *B* является заключением или следствием данных посылок. Поэтому правомерны, например, такие варианты прочтения записей M $\models$ B и A_1, A_2, ..., A_n $\models$ B: «Из множества посылок *M* логически следует *B*», «Заключение *B* логически следует из допущений A_1, A_2, ..., A_n» и т.п.

Попробуем применить понятие логического следования. И без логики мы интуитивно согласились бы с тем, что утверждение импликации вместе с её антецедентом логически влечёт консеквент: «Если прошёл дождь, то дороги мокрые. Дождь прошёл. Следовательно, дороги мокрые». Совпадает ли в данном случае интуиция с точным определением следования, может ли мы утверждать, что (A $\to$ B), A $\models$ B ? − Ответим на поставленный вопрос.

(A	$\to$	B)	A	B
и	и	и	и	и
и	л	л	и	л
л	и	и	л	и
л	и	л	л	л

Из таблицы видно, что всякий раз, когда посылки (A $\to$ B) и A одновременно истинны (на самом деле это имеет место только в первой строке), заключение B тоже истинно (поскольку в первой строке B действительно истинно). Значит, в соответствии с определением, следование есть. Издавна известная схема рассуждений (A $\to$ B), A $\models$ B получила название modus ponens.

Посмотрим, как работает понятие логического следования в первом приведённом примере. Обозначим высказывание «Петя находится в университете» через p, а высказывание «Петя находится дома» через q. Следует ли из {(p $\lor$ q), $\neg$q} p? Построим таблицу истинности для множества {(p $\lor$ q), $\neg$q, p}.

(p	$\vee$	q)	$\neg$q	p
и	и	и	л	и
и	и	л	и	и
л	и	и	л	л
л	л	л	и	л

(Можно было бы не писать в конце таблицы столбец для p, т.к. он просто повторяет первый столбец, но в целях общности рассмотрения мы воспроизвели этот столбец дважды.)

Единственный случай, когда высказывания $(p \vee q)$ и $\neg q$ вместе истинны, отмечен во второй строке таблицы. Но в этой же строке p также истинно. Следовательно, из $(p \vee q)$ и $\neg q$ логически следует p, т.е. $(p \vee q), \neg q \models p$.

Ответим теперь на вопросы, поставленные в начале параграфа. Проверим, следует ли из высказываний $(p \vee q)$, $\neg q$ и $\neg p$ высказывания $\neg(p \vee q)$ и $\neg\neg p$.

(p	$\vee$	q)	$\neg$q	$\neg$p	$\neg(p \vee q)$	$\neg\neg$p
и	и	и	л	л	л	и
и	и	л	и	л	л	и
л	и	и	л	и	л	л
л	л	л	и	и	и	л

(Для экономии места мы поместили высказывания $\neg(p \vee q)$ и $\neg\neg p$ в одну таблицу.)

Смотрим, в какой строке таблицы высказывания $(p \vee q)$, $\neg q$ и $\neg p$ одновременно истинны. Но такой строки в таблице нет! Как же в этом случае решается вопрос о логическом следовании? На самом деле, у нас уже достаточно логических знаний, чтобы однозначно решить эту проблему. «Всякий раз, когда A_1, A_2, ..., A_n истинны, B также истинно» – это условие для наличия логического следования. Оно означает, что «Если A_1, A_2, ..., A_n истинны, то B также истинно». Но, в соответствии с ранее принятым соглашением, метаязыковая импликация «Если, то» понимается так же, как и объектная. Для более чёткого указания на эту связь метаязыковой и объектной импликации мы разрешим себе вместо «Если, то» иногда использовать более короткий метаязыковой символ $\Rightarrow$. В таком случае имеем «A_1, A_2, ..., A_n

истинны $\Rightarrow$ B также истинно». Как объектная, так и метаязыковая импликация истинна всякий раз, когда её антецедент ложен. Метаязыковое утверждение «$(p \vee q)$, $\neg q$, $\neg p$ истинны» ложно во всякой строке построенной таблицы. Следовательно, в каждой строке метаязыковая импликация «$(p \vee q)$, $\neg q$, $\neg p$ истинны $\Rightarrow$ D истинно» верна независимо от того, каково высказывание D! А это означает, что следование $(p \vee q), \neg q, \neg p \models D$ (или, в общем случае, $(A \vee B), \neg B, \neg A \models D$) имеет место для любого высказывания D, в том числе и для высказываний $\neg(p \vee q)$ и $\neg\neg p$.

Кажущаяся парадоксальность данного вывода не должна смущать. Согласно определению, *логическое следование* $M \models B$ *не имеет места только в одном случае: когда все посылки из* M *в какой-то строке таблицы истинны, а высказывание* B *в этой же строке оказалось ложным.* Наличие хотя бы одной такой строки в таблице истинности дает отрицательный ответ на вопрос о логическом следовании. Например, из A не следует (A & B). Действительно, при истинном A и ложном B конъюнкция (A & B) ложна. Далее, из $(A \vee B)$ не следует A, т.к. при истинном B дизъюнкция $(A \vee B)$ истинна, но A может быть при этом ложно. Всё это видно из следующих простых таблиц.

A	(A	&	B)
и	и	и	и
и	и	л	л
л	л	л	и
л	л	л	л

(A	$\vee$	B)	A
и	и	и	и
и	и	л	и
л	и	и	л
л	л	л	л

В первой таблице во второй строке посылка A истинна, а заключение (A & B) ложно. Во второй таблице в третьей строке посылка $(A \vee B)$ истинна, а заключение A ложно. В обоих случаях следования нет, что можно записать в виде $A \not\models (A \& B)$ и $(A \vee B) \not\models A$.

Отметим, что в обратную сторону следование есть: $(A \& B) \models A$ и $A \models (A \vee B)$. Проверка посредством таблиц не вызывает затруднений.

(A	&	B)	A
и	и	и	и
и	л	л	и
л	л	и	л
л	л	л	л

A	(A	$\vee$	B)
и	и	и	и
и	и	и	л
л	л	и	и
л	л	л	л

В этих двух таблицах нет ни одной строчки, в которой посылка истинна, а заключение ложно. Значит, следование имеет место. В первом случае, наверное, и без знания логики любой мало-мальски рассуждающий человек согласил бы с тем, что конъюнкция двух высказываний влечёт первое из этих высказываний. Из «Сократ – мудрец и Сократ – грек» конечно следует, что «Сократ – мудрец». Но вот выведение из высказывания дизъюнкции этого высказывания и ещё какого-то высказывания вряд ли будет принята без сомнений. Пусть, например, А – высказывание «Маша курит». Тогда из «Маша курит» следует, что «Маша курит или пьёт», где в качестве В взято высказывание «Маша пьёт».

Против такого вывода могут возникнуть двоякого рода возражения. Во-первых, неправильно утверждать что-либо об отношении Маши к алкоголю. Из того, что она курит, еще ничего не следует. Во-вторых, в ходе этого вывода была потеряна информация. Мы начали с определенного утверждения, а пришли к альтернативному заключению, уменьшающему степень точности знаний.

Первое возражение логически несостоятельно. Оно имеет под собой психологические основания, в силу которых любое упоминание отрицательных в нравственном плане фактов вместе с чьим-нибудь именем вызывает неприятные эмоции. Однако логика не является психологической дисциплиной и ей нет дела до психологических нюансов.

Со вторым возражением можно согласиться. Действительно, выводы по правилу $A \models (A \vee B)$ приводит к потере информации и снижает степень определенности заключения по сравнению с посылкой. Однако в данном случае временное отступление в дальнейшем может способствовать успешному продвижению вперед.

Убедимся в сказанном. Допустим, имеется утверждение «Если Маша курит или пьет, то она вредит своему здоровью». Пусть также известно, что Маша курит, но не пьет. Тогда она бы могла рассуждать следующим образом: «Вредят здоровью лишь те, кто курят или пьют. Я же только курю, но не пью. Следовательно, вреда моему здоровью нет». Это рассуждение ошибочно, что мы сейчас продемонстрируем.

1. Маша курит (допущение 1)
2. Следовательно, (Маша курит $\vee$ Маша пьет) (вывод из 1)
3. (Маша курит $\vee$ Маша пьет) $\rightarrow$ Маша вредит здоровью (допущение 2)

4. Значит, Маша вредит здоровью (вывод по modus ponens из 3 и 2)

В приведенном рассуждении было использовано правило рассуждений A $\models$ (A $\vee$ B), без которого нельзя было бы получить заключение 4, опровергающее вывод предыдущего рассуждения. Таким образом, временная потеря информации в выводе усиливает возможности логического анализа.

Между прочим, компьютеры рассуждают именно по правилу A $\models$ (A $\vee$ B). Если вы хотите, чтобы в случае реализации альтернативы (A $\vee$ B) вычислительная машина выполнила действие D, то в языке программирования вы можете применить конструкцию вида IF (A OR B) THEN D. Для того, чтобы ЭВМ выполнила D, достаточно, чтобы A стало истинным. Тогда условие (A OR B) тоже станет истинным (ведь из A следует дизъюнкция (A OR B)!) и произойдёт переход к действию D.

Перейдём к более общим свойствам следования, не связанным с конкретными формулами и таблицами истинности.

Первое свойство $\models$. В предыдущих рассуждениях мы столкнулись с ситуацией, когда из некоторого множества высказываний логически следовало любое высказывание. Эта ситуация носит достаточно общий характер: всякий раз, когда множество M оказывается несовместимым, утверждение M $\models$ B верно для любого B. Несовместимое множество утверждений логически влечет любое – вот в чем суть. Поэтому важно убедиться в логической совместимости принимаемой совокупности высказываний. Представим себе, что утверждения о каком-то явлении действительности логически несовместимы. Отсюда можно (по законам логики!) извлечь любое, самое абсурдное и нелепое суждение.

Имеется прямая связь между несовместимостью и противоречивостью. Обычно противоречивыми называют утверждения вида (A & $\neg$A), т.е. утверждения, которые нечто принимают и это же самое одновременно отрицают. Однако в явном виде противоречий такого рода избегает не только специалист или ученый, но и любой здравомыслящий человек. В истории человеческого познания было лишь два исключения из этого правила: софистика и так называемая диалектика, которые не боялись противоречий и поэтому могли приходить к любым выводам, в которых были заинтересованы. Действительно, из противоречий логически следует любое высказывание, аналогично тому, как это было в случае несовместимых высказываний. Убедимся в сказанном.

Построим таблицу истинности для высказывания (A & ¬A).

(A	&	¬A)
и	л	л
л	л	и

Мы видим, что независимо от истинностного значения A, высказывание (A & ¬A) принимает только значение «л», т.е. «ложь. Значит, каково бы ни было высказывание B, невозможна ситуация, когда посылка (A & ¬A) истинна, а заключение B ложно. Поэтому из (A & ¬A) логически следует любое высказывание B или, короче, (A & ¬A) $\models$ B.

Существуют ли высказывания, которые не имеют формы (A & ¬A) (или ¬A & A), но, тем не менее, в таблице истинности принимают только значение «л»? Такие высказывания, как мы видели, существуют. По своим логическим свойствам они (за исключением внешнего вида) во всем аналогичны стандартным противоречивым высказываниям типа (A & ¬A). Например, высказывание ((A ∨ B) & (¬B & ¬A)) противоречиво (убедитесь в этом сами). Вообще, всегда, когда высказывания A_1, A_2, ..., A_n логически несовместимы, высказывание (A_1 & A_2 & ... & A_n) противоречиво (независимо от того, как в этой конъюнкции расставить скобки). Верно и обратное: если высказывание вида (A_1 & A_2 & ... & A_n) противоречиво, то множество {A_1, A_2, ..., A_n} несовместимо.

Это вытекает из свойств конъюнкции, касающихся расстановки скобок в формулах вида(A & B & C). Скобки можно поставить либо со сдвигом влево: ((A & B) & C), либо со сдвигом вправо: (A & (B & C)). Но результат будет тот же самый в том смысле, что оба варианта расстановки скобок приводят к эквивалентным высказываниям в соответствии с законом ассоциативности конъюнкции. Отмеченное свойство конъюнкции (а также дизъюнкции) позволяет не заботиться о том, как именно расставлены скобки в выражениях типа (A_1 & A_2 & ... & A_n) (или в формулах вида $A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$).

Несовместимость высказываний означает, что ни в одной строке таблицы они не могут быть вместе истинными. Но конъюнкция истинна в одном и только в одном случае: когда все члены конъюнкции истинны. Следовательно, конъюнкция несовместимого множества высказываний будет принимать значение «л» в каждой строке таблицы, т.е. будет противоречием.

В обратную сторону. Если конъюнкция противоречива, то это означает, что в каждой строке таблицы по крайней мере один из ее членов ложен. Следовательно, множество всех конъюнктивных членов такого высказывания будет несовместимым множеством.

Итак, из противоречия следует все, что угодно, и несовместимое множество высказываний логически влечет любое высказывание. Поскольку противоречия в практике рассуждений часто встречаются в скрытой форме, необходимо учитывать это обстоятельство и проверять анализируемые совокупности высказываний на совместимость.

Второе свойство $\models$. Противоположностью противоречивых утверждений, как вы уже знаете, являются логические законы, которые в таблице истинности принимают только значение «и». Законы ведут себя двойственным образом по отношению к противоречиям. Если из противоречия следует всё, что угодно, то закон А следует из любого высказывания В или множества высказываний М. В самом деле, поскольку закон всюду (в любой строке таблицы) принимает значение «и», просто не может возникнуть ситуация, в которой А ложно, в то время как посылки истинны. Значит, если $\models$ А, то В $\models$ А и М $\models$ А. Сама форма записи $\models$ А подсказывает ещё одно толкование данного свойства законов логики: раз закон следует из чего угодно, о его посылках можно вообще не упоминать, считая, что закон следует из пустого множества посылок. Таким образом, символ $\models$ является знаком логического следования и в ситуации М $\models$ А, и в ситуации $\models$ А, только в последнем случае наряду с прочтением «А следует из пустого множества посылок» принимается также выражение «А есть логический закон». Сказать, что А следует из пустого множества посылок и сказать, что А логический закон – это одно и то же.

Третье свойство $\models$. Понятие логического закона тесно связано с понятием логического следования. Пусть имеется логическое следование $A_1, A_2, ..., A_n \models B$. Тогда высказывание $((A_1 \& A_2 \& ... \& A_n) \to B)$ является логическим законом, т.е $\models ((A_1 \& A_2 \& ... \& A_n) \to B)$. Верно и обратное утверждение: если $\models ((A_1 \& A_2 \& ... \& A_n) \to B)$, то $A_1, A_2, ..., A_n \models B$.

Действительно, пусть $A_1, A_2, ..., A_n \models B$, но $((A_1 \& A_2 \& ... \& A_n) \to B)$ не является законом. Последнее означает, что нашлась строка в таблице истинности, в которой формула $(A_1 \& A_2 \& ... \& A_n)$ = и, а формула В = л. Т.к. конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда все ее составляющие истинны, в той же самой строке таблицы должно иметь место A_1 = и, A_2 = и, ..., A_n = и. Поскольку при этом B = л, логическое следование из A_1, A_2, ..., A_n высказывания B отсутствует, в противоречии с допущением. Следовательно, коль скоро верно утверждение $A_1, A_2, ..., A_n \models B$, утверждение $\models ((A1 \ \& \ A2 \ \& \ ... \ \& \ An) \rightarrow B)$ также должно быть верным, что и требовалось доказать. Рассуждение в обратную сторону попробуйте провести самостоятельно.

Частным случаем рассмотренного свойства логического следования является ситуация, когда n = 1. Тогда имеем: $A \models B$ если и только если $\models (A \rightarrow B)$. В такой записи связь между логическим следованием $\models$ и импликацией $\rightarrow$ видна наглядно. С одной стороны, сказать «Из A логически следует B» − это все равно, что сказать «Импликация "Если A, то B" есть логический закон». С другой стороны, утверждение о том, что импликация "Если A, то B" есть логический закон, влечёт утверждение о следовании из высказывания A высказывания B.

Тем не менее не нужно смешивать отношение логического следования $\models$ и логическую связку $\rightarrow$. Истинность импликации $(A \rightarrow B)$ не означает, что имеет место следование $A \models B$. Лишь в том случае, если $(A \rightarrow B)$ является законом, можно утверждать следование из высказывания A высказывания B.

Четвёртое свойство $\models$. Пусть имеется некоторое множество высказываний M. Тогда, если $M \models A$ и $A \models B$, то $M \models B$. Т.е., если из множества M логически следует высказывание A, и из A логически следует высказывание B, то из M логически следует B. Иными словами, отношение логического следования *транзитивно*.

В самом деле, $M \models A$ означает, что всякий раз, когда все высказывания из M истинны, A также будет истинно. Но, поскольку $A \models B$, при истинном A и выражение B также будет истинно, так что $M \models B$.

Убедитесь, что $A, B \models (A \ \& \ B)$ и $(A \ \& \ B) \models (B \ \& \ A)$. В силу только что рассмотренного свойства логического следования, мы можем сразу заключить: $A, B \models (B \ \& \ A)$, не прибегая для проверки правильности сделанного утверждения к построению соответствующей таблицы истинности. Теперь становится ясной роль свойства транзитивности логического следования. Оно позволяет существенно сократить количество логических вычислений в том случае, если мы сталкиваемся с ситуацией вида M

$\models$ A и A $\models$ B. Нам уже не нужно строить таблицу истинности для множества M', полученного из M добавлением высказывания A, для того, чтобы убедиться в наличии следования M $\models$ B.

Кроме этого, если неизвестно, имеет ли место следование M $\models$ B, то бывает легче найти такое A, что M $\models$ A и A $\models$ B и тем самым (если такое A действительно существует) решить проблему утвердительно. Например, верно ли утверждение о следовании (A & B) $\models$ (A $\vee$ B) ? Т.к. нам уже известно, что (A & B) $\models$ A и A $\models$ (A $\vee$ B), то сразу получаем вывод: из конъюнкции любых двух высказываний логически следует дизъюнкция этих же высказываний, т.е. имеет место (A & B) $\models$ (A $\vee$ B).

Пятое свойство $\models$. Сохранится ли логическое следование, если переставить местами посылки? Ответ утвердительный: если A_1, A_2, ..., A_n $\models$ B, то B будет следовать из этих посылок независимо от того, в каком порядке они взяты. Например, в правиле modus ponens (A $\rightarrow$ B), A $\models$ B посылки можно переставить, получив вариант того же самого правила A, (A $\rightarrow$ B) $\models$ B. Обсуждаемое свойство вытекает прямо из определения логического следования. Ведь истинность метаимпликации *A_1, A_2, ..., A_n истинны $\Rightarrow$ В истинно* не зависит от того, в какой последовательности выписаны допущения *A_1, A_2, ..., A_n*.

Шестое свойство $\models$. Последнее свойство логического следования, которое мы рассмотрим, состоит в том, что расширение исходного множества высказываний не приводит к сужению множества следствий. Точнее, если M $\models$ A и M $\subset$ S, то S $\models$ A.

Убедимся в наличии этого свойства. Пусть M $\models$ A и к множеству M добавлено некоторое количество новых высказываний, так что получилось новое множество S, включающее в себя M в качестве своей части (или подмножества). Предположим, что S $\not\models$ A. В этом случае найдется такая строка в таблице истинности для множества S', полученного из множества S добавлением к нему высказывания A, что все высказывания из S будут истинными, а высказывание A будет ложным. Но раз все высказывания из S истинны, то истинными будут и все высказывания из M, поскольку все высказывания из M входят в S. В силу M $\models$ A истинность всех высказываний из M влечет истинность высказывания A в той же самой строке таблицы. Итак, предположив, что S $\not\models$ A, получили противоречие, т.к. высказывание A не может в одной и той же строке таблицы быть и истинным, и ложным. Значит, утверждение S $\models$ A верно, что и требовалось доказать.

Данное свойство логического следования делает возможным рост и накопление научных знаний. Если бы выявление новых фактов и формулировка новых законов отменяли все прежние научные выводы, наука прекратила бы существование. В действительности расширение наших научных знаний не приводит к отбрасыванию уже полученных истин и логических следствий из них. Другое дело, если первоначально принимаемые за истину утверждения оказались ложными. В этом случае от них необходимо отказаться. При этом, однако, следствия из этих утверждений могут быть как ложными, так и истинными, поскольку истинность следствий гарантируется только при истинности исходных высказываний. Если же исходные высказывания ложны, вопрос об истинности или ложности их следствий остается открытым.

Отмеченной закономерности подчиняется и процесс роста гуманитарных знаний. Успехи современных гуманитарных дисциплин базируются на достижениях учёных предшествующих поколений. Кроме того, накопление гуманитарных знаний осуществляется с использованием результатов других наук. Все выводы, к которым пришли эти науки, могут быть при необходимости использованы гуманитариями, поскольку, как мы убедились, расширение исходного множества утверждений не приводит к отмене уже полученных следствий. Таким образом, данное свойство логического следования делает возможным не только рост и накопление знаний, но и процесс взаимодействия различных научных дисциплин.

§6. Полные системы логических связок

Сколько всего различных таблиц может быть построено при данном количестве простых высказываний? Нетрудно сообразить, что таблиц для формул, содержащих лишь одно простое высказывание p_1, будет всего четыре. В самом деле, пусть формула A_1 не имеет других атомарных подформул, кроме пропозициональной переменной p_1. Тогда, с абстрактной точки зрения, возможны следующие ситуации.

	1	2	3	4
p_1	A_1	A_1	A_1	A_1
и	и	и	л	л
л	и	л	и	л

Если исходных простых высказываний в формуле два, то можно построить шестнадцать различных таблиц. Пусть формула A_2 не имеет других атомарных подформул, кроме пропозициональных переменных p_1 и p_2. Тогда (опять-таки абстрактно) имеем следующую картину.

		1	2	3	4
p_1	p_2	A_2	A_2	A_2	A_2
и	и	и	и	и	и
и	л	и	и	и	и
л	и	и	и	л	л
л	л	и	л	и	л

		5	6	7	8
p_1	p_2	A_2	A_2	A_2	A_2
и	и	и	и	и	и
и	л	л	л	л	л
л	и	и	и	л	л
л	л	и	л	и	л

		9	10	11	12
p_1	p_2	A_2	A_2	A_2	A_2
и	и	л	л	л	л
и	л	и	и	и	и
л	и	и	и	л	л
л	л	и	л	и	л

		13	14	15	16
p_1	p_2	A_2	A_2	A_2	A_2
и	и	л	л	л	л
и	л	л	л	л	л
л	и	и	и	л	л
л	л	и	л	и	л

Вообще, при n исходных простых высказываний получается 2^n-строчные таблицы и если положить $m = 2^n$, то различных m-строчных таблиц будет 2^m. Таким образом, при $n = 1$ имеем 4 различных таблицы, при $n = 2$ имеем 16 различных таблиц, при $n = 3$ получаем 256 различных таблиц и т.д.

Как мы видели, табличная семантика устроена таким образом, что каждой формуле, построенной из n пропозициональных переменных, однозначно сопоставляется таблица истинности. Возникает следующая естественная обратная проблема: всякой ли таблице для n простых высказываний соответствует некоторая формула, составленная из этих же простых высказываний? Например, можно ли найти четыре различные формулы, содержащие лишь одно простое высказывание, чтобы подставить их вместо A_1 в таблицы первой группы? Или найти шестнадцать различных формул, составленных только из двух простых высказываний, чтобы подставить их вместо A_2 в таблицы второй группы? При этом, разумеется, формулы должны иметь те же самые таблицы истинности, что и таблицы, в которые их подставляют.

Для четырех таблиц первой группы нетрудно найти нужные формулы. Например, четыре следующих формулы соответствуют этим таблицам: $(p_1 \to p_1)$, p_1, $\neg p_1$, $\neg(p_1 \to p_1)$. Если подставить эти формулы в данном порядке вместо A_1 в таблицы 1-4, то получим требуемый результат. Для некоторых из шестнадцати таблиц второй группы у нас уже имеются нужные формулы. Таблица 2 – это таблица для дизъюнкции $\vee$, так что вместо A_2 нужно подставить формулу $(p_1 \vee p_2)$, таблица 5 идентична таблице для импликации $\to$, и A_2 нужно заменить на $(p_1 \to p_2)$, таблица 7 соответствует эквиваленции $\leftrightarrow$, и вместо A_2 подставляется $(p_1 \leftrightarrow p_2)$, таблица 8 даёт конъюнкцию & и формулу $(p_1 \& p_2)$ вместо A_2, и, наконец, таблица 10 представляет исключающую дизъюнкцию ∇ с формулой $(p_1 \nabla p_2)$ вместо A_2.

Всё это наводит на мысль о том, что каждая из таблиц второй группы соответствует определённой бинарной логической связке. Только для пяти связок мы ввели символические обозначения, а для оставшихся одиннадцати не ввели. Аналогичным образом, четыре таблицы первой группы также можно рассматривать как представляющие логические связки, на этот раз унарные. Обозначение имеется только для одной унарной связи – отрицания. Оставшиеся три обозначений не имеют. Подчеркнём, что различных унарных связок будет всего четыре, а различных бинарных связок будет шестнадцать. Никаких иных таблиц, составленных из двух значений «истина» и «ложь», кроме приведённых выше, для унарных и бинарных связок построить невозможно.

Допустим, мы введём три новых обозначения для оставшихся унарных связок и одиннадцать обозначений для недостающих бинарных связок. Решим ли мы тем самым поставленную проблему? − Вряд ли. Ведь помимо формул, составленных из одной или двух пропозициональных переменных, имеются формулы с тремя, четырьмя и более переменными. Для формул с тремя переменными придётся вводить 256 тернарных связкок, для формул с четырьмя переменными − 65536 связок и т.д. О такой перспективе не хочется даже думать. Тем более, что даже для тернарных логических связок нет никаких аналогов в естественном языке, не говоря уже о связках с большей местностью.

Нельзя ли при поиске формулы, соответствующей заранее данной таблице, обойтись меньшим количеством логических связок? В более общей форме: существует ли конечный набор логических связок, с помощью которых для любой таблицы можно построить соответствующую этой таблице формулу? Сформулированная проблема известна как проблема *полноты конечных систем логических связок*. В качестве систем логических связок можно брать произвольные их совокупности. Например, {&, $\vee$, $\neg$}, {$\neg$, $\rightarrow$}, {&, $\rightarrow$}, {&, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, ∇, $\leftrightarrow$} и т.п. Если имеется хотя бы одна таблица, для которой не существует формулы, ей соответствующей, то в таком случае говорят, что принятая система логических связок является *неполной*. В противном случае (т.е. когда для каждой таблицы имеется соответствующая ей формула логики высказываний) система связок будет *полной*.

Легко видеть, что не все системы связок являются полными. Так, система {&, $\vee$} явно неполна. Действительно, попробуем при помощи этих связок построить формулу, соответствующую следующей таблице.

p_1	A_1
и	л
л	и

Если бы в нашей системе имелось отрицание, то достаточно было бы в качестве A_1 взять формулу $\neg p_1$. Но отрицание в данной системе отсутствует. Можно ли имитировать его при помощи связок & и $\vee$? Очевидно, что нет, поскольку как бы мы ни комбинировали переменную p_1 с использованием только этих связок, мы получим лишь то, что при p_1 = «и» вся комбинация окажется истинной, а при p_1 = «л» комбинация будет ложной. Например, $((p_1 \& p_1) \vee p_1)$ истинно тогда и только тогда, когда p_1 истинно. Между тем, нам необходим вариант, при котором истинностное значение формулы меняется на противоположное. Как видим, в рассматриваемом случае такого варианта не существует. Положение не изменится, если дополнить исходную систему импликацией и эквиваленцией $\{\&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, поскольку эти четыре связки опять при истинном p_1 в любой комбинации дадут истину, а нам требуется в первой строке таблицы получить ложь.

Почему нас не может удовлетворить неполная система логических связок? По той причине, что многие высказывания естественного языка тогда не будут выразимы в принятом искусственном языке. Попробуйте, в самом деле, обойтись без отрицания и использовать только конъюнкцию и дизъюнкцию. Мы получим чрезвычайно бедный по выразительным возможностям логический язык, мало пригодный для проведения рассуждений и формулирования мыслей.

Как же получить полную систему связок? Мы уже видели, что вводить отдельную связку для каждой таблицы истинности бесперспективно. Во-первых, число различных таблиц бесконечно (ведь число простых высказываний, для которого строится таблица, можно увеличивать до бесконечности). Во-вторых, в рассуждениях на естественном языке нам хватает ограниченного числа связок. В-третьих, хотелось бы иметь небольшую, компактную систему логических связок — с ней удобнее работать как в практическом, так и в теоретическом плане.

Возможно, полной конечной системы логических связок не существует? Вопрос совершенно правомерный, но, к счастью, на него был получен отрицательный ответ. Оказывается, система логических связок $\{\&, \vee, \neg\}$ является полной. В литературе эта система обозначается аббревиатурой КДО, что означает «Конъюнкция, Дизъюнкция, Отрицание». Разумеется, простых уверений в полноте языка КДО в данном случае недостаточно. Требуется доказать, что это так. Искомое доказательство хотя и громоздкое, но не очень сложное, поэтому приведём его целиком.

Необходимо решить следующую задачу: имея произвольную таблицу истинности, построенную для n простых высказываний (n — любое целое положительное число), надо указать способ конструирования формулы логики высказываний, составленной из тех же самых n простых высказываний только с применением связок &, $\vee$ и $\neg$, соответствующей данной таблице.

Все таблицы можно разделить на три группы: в первой в результирующем столбце стоит только «истина», во второй в результирующем столбце только «ложь», в третьей в результирующем столбце попадаются как значения «истина», так и значения «ложь».

Для первой и второй групп задача решается тривиально. Ясно, что в первом случае составленная из n атомарных высказываний формула должна оказаться логическим законом, а во втором случае искомая формула должна быть противоречивой. Рассмотрим формулы $((p_1 \& p_2 \& p_3 \& \ldots \& p_n) \vee \neg(p_1 \& p_2 \& p_3 \& \ldots \& p_n))$ и $((p_1 \& p_2 \& p_3 \& \ldots \& p_n) \& \neg(p_1 \& p_2 \& p_3 \& \ldots \& p_n))$. Первая формула является частным случаем закона исключённого третьего и потому в каждой строке своей таблицы будет принимать только значение «истина». Вторая формула является конъюнкцией несовместимых формул вида $(A \& \neg A)$, т.е. противоречием, что даёт в каждой строке результат «ложь».

Осталось рассмотреть третий случай. Идея этой части доказательства состоит в том, чтобы *описать предъявленную таблицу на языке логики высказываний*. Языки ведь для того и существуют, чтобы рассказывать о внелингвистических реальностях. Таблицы истинности как раз относятся не к языку, а к обозначаемому. Нетрудно описать любую таблицу на метаязыке. Поскольку таблица построена для n простых высказываний, число строк в ней равно 2^n. Описать таблицу — значит рассказать о каждой её строке. Например, пусть имеется строка, в которой все пропозициональные переменные истинны, а в результирующем столбце стоит ложь. Тогда надо так и сказать: «Если p_1 истинно, p_2 истинно, ... , p_n истинно, то в результирующем столбце стоит ложь». Когда речь идёт о конкретной таблице, n также будет конкретным числом, и пропуск, отмеченный многоточием «...», заполнится. Тем же способом описывается любая возможная строка: «Если p_1 принимает значение v, p_2 принимает значение v, ..., p_n принимает значение v, то в результирующем столбце стоит v», где метапеременная «v» указывает на какое-то истинностное значение (либо «и», либо «л»).

Оказывается, такие объекты, как таблицы истинности, можно описать и на языке логики высказываний, не используя никаких метаязыковых средств. Поскольку правильно построенными выражениями языка логики высказываний являются формулы, в результате получится формула, описывающая данную таблицу истинности, что нам и требуется. Покажем, как строится такое описание.

Каждую строчку таблицы можно представить в следующем виде.

p_1	p_2	....	p_n	A
v	v		v	v

В каждом конкретном случае, разумеется, точно известно, каковы значения метапеременной v. Всего в строке имеется n+1 значение. Нам надо найти неизвестную формулу A, которая на данной строке принимала бы то же самое значение, которое в таблице стоит под символом A. Возможны два варианта: либо A = и, либо A = л. Если A = л, то в этом случае данная строка пока не будет нас интересовать (позднее станет ясно, почему).

Рассмотрим вариант строки, в которой A = и. Допустим, переменная p_i ложна. В метаязыке так бы и выразились: «переменная p_i ложна». Но в объектном языке нет характеристики «ложна». Однако в метаязыке есть вторая возможность − сказать «неверно, что p_i». В действительности оба способа выражения равно допустимы. Второй способ даже проще. Вместо длинного «Высказывание "2 × 2 = 5" ложно» можем просто сказать «Неверно, что 2 × 2 = 5». На этот раз в объектном языке есть характеристика «неверно, что» − это отрицание ¬. Поэтому вместо невыразимого в языке-объекте «переменная p_i ложна» запишем выразимое «$\neg p_i$». А что, если p_i истинна? В метаязыке опять есть два варианта, как это сказать: длинный «Высказывание "2 × 2 = 4" истинно» и короткий «2 × 2 = 4». Значит, в объектном языке достаточно принять формулу «p_i»!

Обобщим сказанное. Чтобы описать на языке-объекте строку таблицы, в которой A = и, запишем формулу вида ($\#p_1$ & $\#p_2$ & ... & $\#p_n$), где $\#p_i$ ($1 \leq i \leq n$) есть $\neg p_i$, если p_i = л в этой строке, и $\#p_i$ есть просто p_i, если p_i = и. Например, пусть n = 6 и истинностные значения распределились следующим образом.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	A
л	л	и	и	л	и	и

Тогда формула, представляющая данную строку таблицы истинности, будет иметь такой вид: ($\neg p_1$ & $\neg p_2$ & p_3 & p_4 & $\neg p_5$ & p_6). Спрашивается, какое истинностное значение примет эта формула в данной строке? Прямое вычисление показывает, что она будет в этой строке истинной. Но нам и требовалось, чтобы неизвестная формула A в данной строке была истинной. Почему построенная формула истинна? − Потому, что она адекватно описывает строку. Переменная p_1 в ней ложна, но мы и говорим «$\neg p_1$» (т.е. «неверно, что p_1»), переменная p_2 вновь ложна, но мы и говорим «$\neg p_2$», переменная p_3 оказалась истинной, но мы и утверждаем «p_3» и т.д. При этом все перечисленные случаи принимаются совместно, что передаётся конъюнкцией «$\neg p_1$», *и* «$\neg p_2$», *и* «p_3» и т.д. Поскольку конъюнкция есть в объектном языке, мы этим пользуемся, получая в результате искомое описание ($\neg p_1$ & $\neg p_2$ & p_3 & p_4 & $\neg p_5$ & p_6) данной строки на языке-объекте.

Аналогичным образом построим конъюнкции для всех строк, в которых A истинна. По построению, каждая такая конъюнкция будет истинной в соответствующей строке таблицы. Допустим, число строк, в которых A истинна, равно $m \geq 1$. Значит, получится m конъюнкций вида ($\#p_1$ & $\#p_2$ & ... & $\#p_n$). Пронумеруем эти конъюнкции. Далее надо сказать «Формула A, которую мы ищем, истинна в ($\#p_1$ & $\#p_2$ & ... & $\#p_n)_1$, и в ($\#p_1$ & $\#p_2$ & ... & $\#p_n)_2$, ..., и в ($\#p_1$ & $\#p_2$ & ... & $\#p_n)_m$ строках». На самом деле A мы уже почти нашли. Перечисленные конъюнкции исчерпывают все случаи, в которых A истинна. Значит, вместо «A истинна» надо просто сказать «A», используя данные конъюнкции. Соединим все эти конъюнкции связкой $\vee$. В результате получим формулу следующего вида.

($\#p_1$ & $\#p_2$ & ... & $\#p_n)_1 \vee$ ($\#p_1$ & $\#p_2$ & ... & $\#p_n)_2 \vee ... \vee$ ($\#p_1$ & $\#p_2$ & ... & $\#p_n)_m$.

В чём её смысл? − В том, что A истинна *или* в строке ($\#p_1$ & $\#p_2$ & ... & $\#p_n)_1$, *или* в строке ($\#p_1$ & $\#p_2$ & ... & $\#p_n)_2$, ..., *или* в строке ($\#p_1$ & $\#p_2$ & ... & $\#p_n)_m$. Может показаться, что вместо «или» надо использовать «и»: A истинна *и* в строке x, *и* в строке y, *и* в строке z *и* т.д. Это означало бы, что все m строк реализовались как бы одновременно. На самом деле строки таблицы представляют отдельные альтернативные возможности, смешивать которые, вообще говоря, нельзя. Возьмём, например, таблицу для исключающей дизъюнкции ($p \nabla q$). В ней две строки, в которых формула ($p \nabla q$) истинна. Опишем эти строки: (p & $\neg q$), ($\neg p$ & q). В данном случае альтернативы несовместимы. Если мы применим конъюнкцию для соединения описаний строк, то получим противоречивую формулу ((p & $\neg q$) & ($\neg p$ & q)). Если же применим дизъюнкцию, то получим формулу ((p & $\neg q$) $\vee$ ($\neg p$ & q)), которая не только не противоречива, но и имеет ту же самую таблицу истинности, что и формула ($p \nabla q$), т.е. эти формулу эквивалентны. Ведь формула ($p \nabla q$) истинна либо в случае истинности p и ложности q, либо в случае ложности p и истинности q. Но формула $((p \ \& \ \neg q) \vee (\neg p \ \& \ q))$ утверждает ровно это, не используя отсутствующие в объектном языке слова «истина» и «ложь»!

Попробуем описать таблицы для оставшихся связок. Таблицу для не исключающей дизъюнкции ($p \vee q$) выразит формула $(p \ \& \ q) \vee (p \ \& \ \neg q) \vee (\neg p \ \& \ q)$, описывающая три строки, в которых дизъюнкция истинна. Конъюнкция ($p \ \& \ q$) истинна только в одной строке, описание которой совпадает с первоначальной формулой ($p \ \& \ q$). Импликация ($p \to q$) имеет в таблице три строки со значением «истина», поэтому описание её таблицы должно быть представлено формулой $(p \ \& \ q) \vee (\neg p \ \& \ q) \vee (\neg p \ \& \ \neg q)$. Для эквиваленции ($p \leftrightarrow q$) в соответствии с её таблицей имеем $(p \ \& \ q) \vee (\neg p \ \& \ \neg q)$. Наконец, таблица для отрицания $\neg p$, имеющая только одну строку с результирующим значением «истина», описывается, как и в случае с конъюнкцией, самой формулой $\neg p$.

Полученный результат не случаен. Для описания таблицы, содержащей одно или более результирующее значение «истина», достаточно записать формулу $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ \dots \ \& \ \#p_n)_1 \vee (\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ \dots \ \& \ \#p_n)_2 \vee \dots \vee (\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ \dots \ \& \ \#p_n)_m$. Ничего больше (как и в примерах с таблицами для исходных связок) делать не нужно. Эта формула и будет искомой формулой A, которую мы искали.

Действительно, если A истинна в некоторой строке n, то эта строка описывается некоторой подформулой $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ \dots \ \& \ \#p_n)_i$, которая, как мы уже видели, будет истинна в строке n. Но истинность дизъюнктивного члена $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ \dots \ \& \ \#p_n)_i$ приведёт к истинности всей дизъюнкции $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ \dots \ \& \ \#p_n)_1 \vee (\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ \dots \ \& \ \#p_n)_2 \vee \dots \vee (\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ \dots \ \& \ \#p_n)_m$ в той же строке n, что и требовалось.

Если же в строке n A ложна, то и каждый дизъюнктивный член $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ \dots \ \& \ \#p_n)_i$ при $1 \leq i \leq m$ будет ложным, что приведёт к ложности всей дизъюнкции $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ \dots \ \& \ \#p_n)_1 \vee (\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ \dots \ \& \ \#p_n)_2 \vee \dots \vee (\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ \dots \ \& \ \#p_n)_m$ в той же строке n, что и требовалось. Почему каждая подформула $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ \dots \ \& \ \#p_n)_i$ будет ложной в строке n ? – Потому, что эти подформулы описывали только строки с результирующим значением «истина». Но в строке n результирующим значением, по предположению, является «ложь». Пусть подформула $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ \dots \ \& \ \#p_n)_i$ описывает строку номер k. В строке k результирующим значением является «истина». Но n отличается от k хотя бы одним приписыванием значения некоторой переменной p_j.

Допустим, что p_j истина в n и ложна в k. Тогда подформула $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ ... \ \& \ \#p_n)_i$ приобретает вид $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ ... \ \& \ \neg p_j \ \& \ ... \ \& \ \#p_n)_i$. Отсюда в строке n формула $\neg p_j$ примет значение «ложь», что сделает ложной всю подформулу $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ ... \ \& \ \neg p_j \ \& \ ... \ \& \ \#p_n)_i$ в строке n.

Допустим теперь, что p_j ложна в n и истинна в k. Тогда подформула $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ ... \ \& \ \#p_n)_i$ приобретает вид $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ ... \ \& \ p_j \ \& \ ... \ \& \ \#p_n)_i$. Отсюда в строке n формула p_j примет значение «ложь», что сделает ложной всю подформулу $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ ... \ \& \ p_j \ \& \ ... \ \& \ \#p_n)_i$ в строке n.

Таким образом, дизъюнктивный член $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ ... \ \& \ \#p_n)_i$ будет ложным во всякой строке n, в которой результирующим значением является «ложь».

Те же самые рассуждения верны для любого дизъюнктивного члена. Значит, в любой строке n, в которой результирующим значением является «ложь», вся дизъюнкция $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ ... \ \& \ \#p_n)_1 \vee (\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ ... \ \& \ \#p_n)_2 \vee ... \vee (\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ ... \ \& \ \#p_n)_m$ также примет значение «ложь».

В результате получилось, что формула вида $(\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ ... \ \& \ \#p_n)_1 \vee (\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ ... \ \& \ \#p_n)_2 \vee ... \vee (\#p_1 \ \& \ \#p_2 \ \& \ ... \ \& \ \#p_n)_m$ адекватно описывает всякую таблицу, содержащую одно или более результирующих значений «истина». Тем самым *доказана теорема о полноте системы связок* КДО. Этих трёх связок достаточно, чтобы построить формулу, соответствующую *любой* наперёд заданной таблице истинности (напомним, что таблицы, результирующие столбцы которых содержат только ложь, также описываются в языке КДО, как было показано выше).

Применим на практике полученный результат. Пусть дана следующая таблица истинности.

p	q	r	A
и	и	и	л
и	и	л	и
и	л	и	л
и	л	л	и
л	и	и	л
л	и	л	и
л	л	и	л
л	л	л	и

Какую формулу в языке КДО надо подставить вместо A? Дадим формульное описание строк с результирующим значением «истина» и соединим их дизъюнкцией: $(p \ \& \ q \ \& \ \neg r) \vee (p \ \& \ \neg q \ \& \ \neg r) \vee (\neg p \ \& \ q \ \& \ \neg r) \vee (\neg p \ \& \ \neg q \ \& \ \neg r)$. Проверьте, что полученная формула действительно соответствует данной таблице.

Рассмотрим ещё одну таблицу истинности.

p	q	r	A
и	и	и	и
и	и	л	и
и	л	и	л
и	л	л	и
л	и	и	и
л	и	л	л
л	л	и	и
л	л	л	и

В ней в результирующем столбце стоит шесть значений «истина» и только два значения «ложь». Нельзя ли вместо длинного описания шести истинных альтернатив дать более короткое описание двух ложных строк?

Оказывается, описывать можно не только истинные, но и ложные строки. Только для этого (исключительно в интересах логического дела) придётся лгать! В первой ложной строке p истинно, q ложно и r истинно. По правде надо было бы сказать «p», «$\neg$q» и «r». Но мы скажем «$\neg$p», «q» и «$\neg$r». Далее, правдивые утверждения о переменных соединяла конъюнкция, но мы используем дизъюнкцию $(\neg p \vee q \vee \neg r)$. Действуя тем же способом, для второй ложной строки получим $(p \vee \neg q \vee r)$. Наконец, если раньше описания строк отделяла друг от друга дизъюнкция, то теперь мы этому вопреки используем конъюнкцию. В итоге получится формула $(\neg p \vee q \vee \neg r) \ \& \ (p \vee \neg q \vee r)$, в которой всё сказано шиворот навыворот. Зато эта формула ложна в третьей и шестой строках, а в остальных строках истинна, что и даёт желанное более короткое описание исходной таблицы.

Теорема о полноте системы КДО дает мощный инструмент анализа логических свойств рассуждений в логике высказываний, позволяющий выходить за рамки очевидного. Применение этого инструмента обычно осуществляется следующим образом.

Показывают, что в некоторой системе логических связок $\{\#_1, \#_2, ..., \#_n\}$ можно определить связки КДО. Иначе говоря, надо показать, что связки КДО выразимы в новой системе. Тем самым новая система также оказывается полной: в ней можно проводить все построения, что и в системе КДО. Дальнейшее изложение сделает понятным сказанное.

Система связок $\{\to, \neg\}$ *является полной*. Для доказательства этого факта достаточно показать, что в этой системе определимы связки &, $\vee$ и $\neg$. Что касается связки $\neg$, то она уже имеется в системе. Осталось определить & и $\vee$ через $\to$ и $\neg$.

$(A \,\&\, B) \leftrightarrow \neg(A \to \neg B)$

$(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \to B)$

Проверьте, верны ли две приведенные эквивалентности.

В логике действует *принцип замены эквивалентных*, который аналогичен принципу замены равного равным в арифметике. Согласно этому принципу, любую формулу или подформулу можно заменить на ей эквивалентную. В результате такой замены таблицы истинности *не изменятся*. Пусть, к примеру, в языке КДО дана формула $(p \vee q) \vee \neg(\neg p \,\&\, \neg q)$. Переведём её на язык $\{\to, \neg\}$, используя замены эквивалентных. Первая главная подформула является дизъюнкцией $(p \vee q)$. Её переводом будет формула $(\neg p \to q)$. Конъюнкцию $(\neg p \,\&\, \neg q)$ заменим на $\neg(\neg p \to \neg\neg q)$. В исходной формуле конъюнкция отрицалась, поэтому вторая главная подформула $\neg(\neg p \,\&\, \neg q)$ переводится как формула $\neg\neg(\neg p \to \neg\neg q)$. Получим формулу $(\neg p \to q) \vee \neg\neg(\neg p \to \neg\neg q)$. В ней всё ещё встречается дизъюнкция, которую тоже надо эквивалентно устранить. В результате имеем формулу $\neg(\neg p \to q) \to \neg\neg(\neg p \to \neg\neg q)$ языка $\{\to, \neg\}$. Эта формула эквивалентна первоначальной формуле $(p \vee q) \vee \neg(\neg p \,\&\, \neg q)$, что проверяется табличными вычислениями.

Ещё один пример замены конъюнкции на эквивалентную формулу, содержащую только $\to$ и $\neg$. Пусть дана конъюнкция $(A \,\&\, B \,\&\, C \,\&\, D)$. Чтобы легче было ее преобразовывать, расставим в ней скобки (как мы знаем, делать это можно произвольным образом). Возьмем, скажем, $((A \,\&\, B) \,\&\, (C \,\&\, D))$. Заменим $(A \,\&\, B)$ на эквивалентную формулу $\neg(A \to \neg B)$, а формулу $(C \,\&\, D)$ – на эквивалентную формулу $\neg(C \to \neg D)$. Получим $(\neg(A \to \neg B) \,\&\, \neg(C \to \neg D))$. Устраним теперь оставшуюся конъюнкцию: $\neg(\neg(A \to \neg B) \to \neg\neg(C \to \neg D))$. Последняя формула эквивалентна исходной конъюнкции, в чем нетрудно убедиться.

Аналогичные цепочки эквивалентных преобразований можно проводить с дизъюнкциями. Главное, что при этом получаются формулы, эквивалентные исходным. Эквиваленция $\leftrightarrow$ играет в логике примерно ту же роль, что и знак равенства = в арифметике. Как и в арифметике, где широко применяются переходы от равенства к равенству, в логике часто приходится переходить от одних формул к другим, эквивалентным исходным.

Например, формула $\neg(\neg(A \to \neg B) \to \neg\neg(C \to \neg D))$ является эквивалентной формуле $\neg(\neg(A \to \neg B) \to (C \to \neg D))$, поскольку двойное отрицание равнозначно отсутствию отрицания. Т.к. первая формула эквивалентна конъюнкции (A & B & C & D), вторая формула тоже будет эквивалентна этой же конъюнкции. В этом рассуждении тоже был использован принцип замены эквивалентных высказываний.

Принцип замены эквивалентных действительно аналогичен арифметическому принципу замены равного равным. Например, при вычислении арифметического выражения ((2 + 4) : 3) вместо (2 + 4) можно подставить число 6, поскольку (2 + 4) = 6. Точно так же в логике, если дана некоторая формула F, содержащая подформулу A, и при этом $A \leftrightarrow B$, то при замене A на B получим высказывание F' такое, что $F \leftrightarrow F'$.

Разумеется, при такой замене надо соблюдать некоторые очевидные ограничения. Например, в арифметической формуле ((2 + 4) : 3) нельзя заменять часть "2 +". Заменяемая часть должна быть осмысленным арифметическим выражением. Аналогичным образом, в логике нельзя, например, заменять часть вида "A $\to$" или "& B)" на какую-либо другую. Опять-таки, заменяемое выражение должно быть логически осмысленным. Это означает, что такое выражение должно быть формулой, которую можно использовать самостоятельно (а не только как составную часть других высказываний). Выражения типа "A $\to$ B)", "(A & B)) $\vee \neg$" и т.д. могут входить в правильно построенные высказывания в качестве частей, но сами формулами не являются и потому не способны существовать в качестве осмысленных выражений.

Сформулируем принцип замены эквивалентных строже. *Если A является подформулой формулы F и $A \leftrightarrow B$, то при замене каждого вхождения A в F на B получится формула F' такая, что $F \leftrightarrow F'$. Если A совпадает с F и $A \leftrightarrow B$, то тогда F' просто совпадет с B.* Примеры замены эквивалентных приводились выше, и нам еще не раз придётся столкнуться с применением данного принципа.

Итак, мы доказали полноту системы связок $\{\to, \neg\}$ и продемонстрировали метод замены эквивалентных высказываний. Полнота упомянутой системы означает, что мы можем ограничиться только использованием связок $\to$ и $\neg$ в рассуждениях логики высказываний. Как мы видели, ту же самую функцию может выполнять система КДО. Какую же систему выбрать? Можно взять любую, но более практично объединить названные системы связок. Разумеется, при этом снова получится полная система. В случае необходимости можно и дальше пополнять эту совокупность связок (добавив к ней, например, эквиваленцию $\leftrightarrow$ и исключающую дизъюнкцию ∇. Важно то, что расширение полной системы связок вновь приводит к полной системе.

В системе КДО $\{\&, \vee, \neg\}$ три связки, в системе $\{\to, \neg\}$ две. Можно ли уменьшить число связок в КДО, не утратив при этом свойства полноты? Оказывается, что полными являются следующие две подсистемы КДО: $\{\&, \neg\}$ и $\{\vee, \neg\}$. Не только импликация $\to$, но и конъюнкция & и дизъюнкция $\vee$ в комбинации с отрицанием $\neg$ дают полные системы связок.

Чтобы убедиться в сказанном, проверьте истинность двух следующих эквивалентностей.

$$(A \mathbin{\&} B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \mathbin{\&} \neg B)$$

Из полноты систем $\{\&, \neg\}$ и $\{\vee, \neg\}$ следует, что не только связки & и $\vee$ определимы через $\to$ и $\neg$ (соответствующие эквивалентности были приведены выше), но и импликация $\to$ должна быть определимой в каждой из этих систем. Действительно, следующие эквивалентности показывают, что это так.

$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

$$(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \mathbin{\&} \neg B)$$

Применяя принцип замены эквивалентных, мы можем теперь избавиться от использования любых двух связок из совокупности $\{\&, \vee, \to\}$, оставив только какую-либо одну из них вместе с отрицанием $\neg$. Но, как только что было отмечено, удобнее пользоваться всеми широко применяемыми в рассуждениях логическими связками. В чем же тогда практическое значение полученных результатов? Рассмотренные эквивалентности устанавливают взаимные зависимости между различными логическими связками, позволяя яснее и глубже понять их роль в рассуждениях.

В частности, левые части приведенных эквивалентностей не содержат знака "$\neg$" и имеют более простой вид. Встретившись при анализе рассуждений с высказываниями из правых частей этих эквивалентностей, можно данные рассуждения упростить, заменив в соответствии с принципом замены эквивалентных правые части на левые.

Например, громоздкое высказывание $\neg(\neg\neg(A \,\&\, \neg B) \vee \neg\neg(B \,\&\, \neg A))$, смысл которого с первого взгляда представляется загадочным, после трёх несложных эквивалентных преобразований приобретает простой и понятный вид.

(1) $\neg(\neg\neg(A \,\&\, \neg B) \vee \neg\neg(B \,\&\, \neg A)) \leftrightarrow \neg(\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow A))$

(Эквивалентная замена $\neg(A \,\&\, \neg B)$ и $\neg(B \,\&\, \neg A)$ на $(A \rightarrow B)$ и $(B \rightarrow A)$ соответственно.)

(2) $\neg(\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow A)) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A))$

(Эквивалентная замена высказывания вида $\neg(\neg X \vee \neg Y)$ на $(X \,\&\, Y)$, где вместо X стоит формула $(A \rightarrow B)$, а вместо Y – формула $(B \rightarrow A)$.)

(3) $((A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A)) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$

(Эквивалентность и есть импликация в обе стороны.)

Т.к. эквиваленция транзитивна, т.е. если $(X \leftrightarrow Y)$ и $(Y \leftrightarrow Z)$, то $(X \leftrightarrow Z)$ (в этом нетрудно убедиться, поскольку эквивалентные формулы имеют одинаковые результирующие столбцы в таблице истинности), применяя указанный переход дважды, приходим к выводу:

$\neg(\neg\neg(A \,\&\, \neg B) \vee \neg\neg(B \,\&\, \neg A)) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$.

Как видим, первоначальное сложное высказывание $\neg(\neg\neg(A \,\&\, \neg B) \vee \neg\neg(B \,\&\, \neg A))$ в действительности имеет очень простой смысл: оно утверждает, что $(A \leftrightarrow B)$, т.е., что высказывание A эквивалентно высказыванию B.

Внимательный читатель мог заметить, что во всех приведенных полных системах логических связок фигурировало отрицание. Может быть, в любой полной системе должно иметься отрицание $\neg$? Далее, поскольку одно отрицание явно не образует полной системы, верен ли вывод, что полная система содержит как минимум две логические связки? Как показывают нижеследующие рассуждения, на оба эти вопроса нужно дать отрицательный ответ.

Рассмотрим новую двухместную логическую связку $\downarrow$, которая не имеет аналога в естественном языке, но которую мы, тем не менее, можем определить точным образом, построив для нее таблицу истинности.

A	B	(A $\downarrow$ B)
и	и	л
и	л	л
л	и	л
л	л	и

Связка $\downarrow$ называется *стрелкой Пирса*. Ещё $\downarrow$ называют *антиконъюнкцией*, поскольку её результирующий столбец есть перевёрнутый столбец для конъюнкции. Построим следующую совместную таблицу для отрицания и новой связки.

A	$\neg$A	(A $\downarrow$ A)
и	л	л
л	и	и

Из этой таблицы видно, что верна эквивалентность ($\neg$A) $\leftrightarrow$ (A $\downarrow$ A), т.е отрицание $\neg$ определимо через связку $\downarrow$.

Построим еще одну совместную таблицы, на этот раз для конъюнкции & и новой связки $\downarrow$.

A	B	(A & B)	((A $\downarrow$ A)	$\downarrow$	(B $\downarrow$ B))
и	и	**и**	л	**и**	л
и	л	**л**	л	**л**	и
л	и	**л**	и	**л**	л
л	л	**л**	и	**л**	и

Как видим, результирующий столбец для формулы ((A $\downarrow$ A) $\downarrow$ (B $\downarrow$ B)) совпадает с результирующим столбцом формулы (A & B), т.е. имеет место эквивалентность (A & B) $\leftrightarrow$ ((A $\downarrow$ A) $\downarrow$ (B $\downarrow$ B)).

Две только что полученные эквивалентности показывают, что связки $\neg$ и & определимы через связку $\downarrow$. Это означает, что система {$\downarrow$}, содержащая одну-единственную связку $\downarrow$, является полной!

Имеется еще одна полная система, содержащая единственную логическую связку |, называемую *штрихом Шеффера* или *антидизъюнкцией*. Как и $\downarrow$, связка | не представлена в естественном языке. Ее свойства определяются следующей таблицей истинности.

A	B	(A | B)
и	и	л
и	л	и
л	и	и
л	л	и

Полнота системы {|} вытекает из следующих двух эквивалентностей.

$$\neg A \leftrightarrow (A \mid A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow ((A \mid A) \mid ((B \mid B))$$

(Проверьте истинность этих эквивалентностей самостоятельно.)

Стрелка Пирса и штрих Шеффера лишний раз свидетельствуют о том, что логика занимается не изучением эмпирических закономерностей мыслительной деятельности, а установлением теоретических законов возможных способов рассуждений. Вряд ли кто-либо из людей способен мыслить, формулируя высказывания на языке антиконъюнкций или антидизъюнкций. Однако для компьютеров или иных машин, осуществляющих логические операции, может быть, проще рассуждать, используя всего одну логическую связку.

Подводя итог, укажем на предоставляемые логикой широкие возможности выбора различных равносильных способов выражения мыслей. Некоторые из этих способов выглядят достаточно экзотично (вспомним о только что разобранных операциях $\downarrow$ и $\mid$), другие тесно связаны с привычными методами формулирования высказываний в естественном языке. Независимо от того, какой конкретный набор логических связок взят за основу, он должен обеспечивать возможность выразить любое мыслимое высказывание, т.е. должен быть полным.

§7. Альтернативные интерпретации языка логики высказываний

Выше уже отмечалась аналогия, существующая между некоторыми логическими и арифметическими законами. Эта аналогия наводит на мысль об иной семантике для языка логики высказываний. Новая семантика будет арифметической. Точнее, будет использован лишь фрагмент арифметики. Из всех целых чисел оставим только 0 и 1. Число 0 будет аналогом лжи, число 1 – аналогом истины. Тогда конъюнкция ведёт себя как умножение, что демонстрирует следующая таблица.

A	B	A	B	(A & B)	(A & B)	(A × B)
и	и	1	1	и	1	1
и	л	1	0	л	0	0
л	и	0	1	л	0	0
л	л	0	0	л	0	0

Исключающей дизъюнкции соответствует не совсем обычное сложение. В одной из строк нижеследующей таблицы результат оказывается не тот, который получается при стандартном сложении. Поэтому такое сложение обозначено знаком ⊕.

A	B	A	B	(A ∇ B)	(A ∇ B)	(A ⊕ B)
и	и	1	1	л	0	0
и	л	1	0	и	1	1
л	и	0	1	и	1	1
л	л	0	0	л	0	0

Как видно из таблицы, $0 \oplus 0 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$, $0 \oplus 1 = 1$, однако $1 \oplus 1$ равно не двум, а даёт ноль: $1 \oplus 1 = 0$. Можно было бы вместо этого положить $1 \oplus 1 = 1$, выразив не исключающую дизъюнкцию. В любом случае мы договорились не использовать числа, отличные от 0 или 1.

Система связок {&, ∇}, (как и система {&, ∨}) неполна. В ней нельзя выразить отрицание. Правда, при истинном A формула (A ∇ A) даёт ложь, но при ложном A надо получить истину, в то время как и формула (A & A), и формула (A ∇ A) дадут ложь. И как бы мы ни комбинировали эти формулы, при ложном A ничего, кроме лжи, не получится. Значит, в систему нужно добавить отрицание. Для этого нам потребуется обычное вычитание.

A	A	¬A	¬A	(1 − A)
и	1	л	0	0
л	0	и	1	1

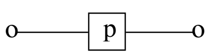
Система связок $\{\&, \nabla, \neg\}$ полна, поскольку содержит полную подсистему $\{\&, \neg\}$.

При вычислении арифметических выражений используется знак равенства. Поэтому завершает арифметическую интерпретацию языка логики высказываний разрешение использовать в вычислениях значений формул этот знак. Например, формуле $((A \,\&\, \neg B) \nabla B)$ в данной семантике соответствует арифметическая формула $((A \times (1 - B)) \oplus B)$. При $A = 1$ и $B = 1$ получаем $((1 \times (1 - 1)) \oplus 1) = 1$. При $A = 1$ и $B = 0$ имеем $((1 \times (1 - 0)) \oplus 0) = 1$. $A = 0$ и $B = 1$ даёт $((0 \times (1 - 1)) \oplus 1) = 1$. Наконец, если $A = 0$ и $B = 0$, получим $((0 \times (1 - 0)) \oplus 0) = 0$. Таким образом, формула $((A \,\&\, \neg B) \nabla B)$ выражает обычную не исключающую дизъюнкцию $(A \vee B)$. Так как система $\{\&, \nabla, \neg\}$ полна, в ней можно выразить все остальные логические связки (упражнение).

Законам соответствуют арифметические формулы, тождественно равные 1, противоречиям – формулы, тождественно равные нулю, а фактуальным формулам логики высказываний соответствуют арифметические выражения, равные то 1, то 0. Например, противоречивой формуле $(A \,\&\, \neg A)$ соответствует выражение $(A \times (1 - A))$, которое и при $A = 1$, и при $A = 0$ даёт 0. Закону непротиворечия $\neg(A \,\&\, \neg A)$ сопоставляется арифметическая формула $(1 - (A \times (1 - A)))$, которая равна 1 при любом значении A.

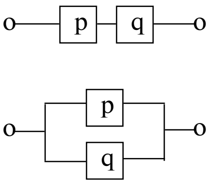
Ещё одна, третья по счёту, семантика для языка логики высказываний также идейно связана с языком КДО. Рассмотрим электрические схемы, которые состоят из проводников и переключателей. Каждый переключатель может находиться в одном из двух состояний: либо переключатель замкнут (тогда через него течёт электрический ток), либо переключатель разомкнут (и тогда ток через него не течёт). Разрешим обозначать такие переключатели буквами $p, q, r, s, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$.

Изобразим участок цепи, на котором находится переключатель p. Если p замкнут или включён, то по участку пойдёт ток.



Если же p разомкнут или выключен, то ток через участок не проходит. Аналогия с истинностной интерпретацией пропозициональных переменных здесь очевидна. Либо высказывание «По участку течёт ток» истинно, что соответствует состоянию «p включено», либо оно ложно, что соответствует состоянию «p выключено».

Два различных переключателя p и q могут быть соединены между собой либо последовательно, либо параллельно, как показано на следующих схемах. Теперь имеется не две, а четыре альтернативные возможности: (1) «p включено» и «q включено», (2) «p включено» и «q выключено», (3) «p выключено» и «q включено», (4) «p выключено» и «q выключено». Очевидно, что в случае (1) ток будет течь как при последовательном, так и при параллельном соединении. Однако в оставшихся случаях (2) – (4) ток через последовательное соединение не потечёт. При параллельном соединении в случае (2) ток пойдёт по верхнему участку цепи, а в случае (3) – по нижнему участку. В любом из случаев (1) – (3) параллельное соединение обеспечивает прохождение тока по цепи. И лишь в случае (4) параллельное соединение окажется заблокированным. Проведённое рассуждение показывает, что последовательное соединение переключателей p и q описывается конъюнкцией (p & q), а параллельное соединение p и q выражается через дизъюнкцию (p ∨ q).

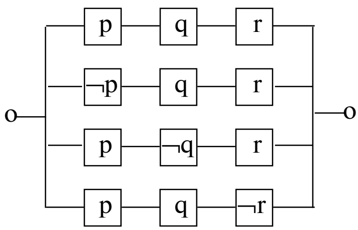


На практике переключатели не всегда должны действовать независимо. Два и более переключателей могут действовать таким образом, что они всегда либо вместе включены, либо вместе выключены. Условимся обозначать такие переключатели на схемах одинаковыми буквами. Существует ещё зависимость иного рода. Нам потребуются такие переключатели, что включение одного приводит к выключению другого, и, наоборот, выключение первого приводит к включению второго. Если есть два таких переключателя и один из них обозначен буквой p, то поведение второго логично описать формулой ¬p. И снова, если какие-то переключатели всегда включаются и выключаются вместе с переключателем ¬p, то все они также должны на схемах обозначаться как ¬p.

Теперь для описания электрических схем используется полный набор логических связок {&, ∨, ¬}. В силу полноты, любая электрическая схема, построенная из переключателей перечисленных видов, может быть адекватно описана на языке КДО. И наоборот, каждой формуле логики высказываний в языке КДО соответствует электрическая схема, структура которой аналогична структуре формулы.

Представим себе, что в некоторой стране решения принимаются президентом, премьер-министром и председателем парламента большинством голосов. Однако, премьер-министр и председатель побаиваются президента и голосуют также, как и президент. Тогда президент решил, что будет лучше, если члены тройки не смогут увидеть, как кто голосует. Перед каждым из них поместили кнопку, нажатие на которую означает «за», а не нажатие – «против», и, поскольку они не видят, кто на что нажимает, действовать им придётся независимо друг от друга. Задача: сконструировать электрическую схему, которая срабатывала бы только в том случае, когда два или три голосующих одновременно высказались «за».

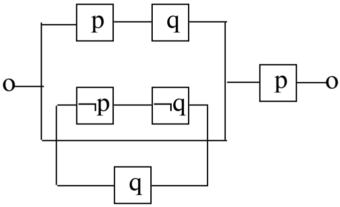
Пусть p означает «Президент голосует «за»», q – «Премьер голосует «за»» и r – «Председатель голосует «за»». Решение принимается, если или все трое «за», или только один «против».



Значит, если (p & q & r), то решение принято. А как выразить мнение «против» только одного участника голосования? Тут имеются три возможности: (¬p & q & r), (p & ¬q & r) и (p & q & ¬r). Все полученные альтернативы описываются формулой ((p & q & r) ∨ (¬p & q & r) ∨ (p & ¬q & r) ∨ (p & q & ¬r)). Теперь по этой формуле можно строить электрическую схему, которая изображена на рисунке. В соответствии с данной схемой, при нажатии трёх кнопок одновременно ток потечёт по верхнему участку, а три других участка будут заблокированы. Если президент не нажал кнопку, а премьер и председатель нажали, ток потечёт только по второму сверху участку и т.д.

В построенной семантике электрических схем естественным образом возникает задача, которая не была столь актуальной для табличной и арифметической семантик. Переключатели и проводники стоят денег, и, кроме того, чем проще схема, тем она надёжнее. Следовательно, встаёт проблема упрощения схем. Эта проблема трансформируется в задачу поиска такой формулы логики высказываний в языке КДО, которая была бы самой короткой из всего класса ей эквивалентных.

Приведём пример решения такого рода задачи. Дана схема, изображенная на рисунке. Можно ли эту схему упростить? Без знания логики найти решение затруднительно. Но если исполь-

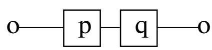


зовать логику высказываний, решение обнаруживается чуть ли не автоматически. Опишем данную схему формулой. Ясно, что исходных атомарных подформул будет всего две – p и q. Верхний участок схемы является последовательным соединением p и q, что выражается конъюнкцией (p & q). Нижний участок схемы разветвляется на конъюнкцию (¬p & ¬q) и на выход к переключателю q, что описывается дизъюнкцией ((¬p & ¬q) ∨ q). В свою очередь, описанные верхний и нижний участки соединены параллельно, что отображается дизъюнкцией ((p & q) ∨ ((¬p & ¬q) ∨ q)). Наконец, к этим участкам последовательно подсоединён переключатель p. Остаётся конъюнктивно добавить его обозначение к только что построенной дизъюнкции. В результате получается формула (((p & q) ∨ ((¬p & ¬q) ∨ q)) & p), описывающая всю схему в целом.

Построим таблицу истинности для итоговой формулы, указав последовательность вычисления столбцов (кроме тривиально определяемых столбцов для ¬p и ¬q).

			1		4		2		3		5	
p	q	(((p	&	q)	∨	((¬p	&	¬q)	∨	q))	&	p)
и	и		и		и		л		и	и	**и**	
и	л		л		л		л		л	л	**л**	
л	и		л		и		л		и	и	**л**	
л	л		л		и		и		и	л	**л**	

Результирующий столбец номер 5 выделен полужирным шрифтом. Но это столбец конъюнкции (p & q)! Значит, вместо длинной формулы от двух переменных (((p & q) ∨ ((¬p & ¬q) ∨ q)) & p) достаточно взять эквивалентную ей, и при том максимально короткую, формулу (p & q). Рассматриваемая громоздкая схема, таким образом, упрощается до тривиального последовательного соединения переключателей p и q:



Ещё одна особенность семантики электрических схем. В ней ни законы, ни противоречия не играют никакой роли. Ведь по схеме закона постоянно течёт ток, если подать напряжение на её вход. Тогда зачем тратить время и деньги на размещение на такой схеме переключателей? Проще и дешевле заменить эту схему проводником, не содержащим никаких переключателей. По противоречивой схеме ток никогда не течёт, поэтому такой участок в цепи просто не нужен и его надо удалить. Интерес представляют только фактуальные высказывания, представляющие разные схемы переключений, по которым, в зависимости от логических условий, ток то идёт, то не идёт.

Итак, было предложено три формально точных семантики языка логики высказываний: семантика двузначных *таблиц* истинности и ложности, *арифметическая* семантика на числах 0 и 1, и семантика составленных из проводников и переключателей электрических схем, которые ещё называют *контактно-релейными* схемами.

В чём же истинный смысл языка логики высказываний, о чём нам говорит этот язык, каковы те объекты, которые обозначают знаки этого языка? – Так вопрос ставить нельзя. Рассматриваемый язык является системой знаков-символов. А символы, как мы видели ранее, не имеют никакой связи с обозначаемым, кроме конвенциальной, т.е. связи по соглашению. Три построенные семантики – это три конвенции, каждую из которых можно принимать независимо от остальных. Исчерпывают ли эти конвенции возможные интерпретации символического языка логики высказываний? Нет, существуют и описаны в логической литературе другие семантики данного языка. Более того, можно строить новые, ранее неизвестные семантики.

В принципе, такова же ситуация с любыми символическими языками, в том числе естественными. Мы можем придавать словам и выражениям языка такие значения, которые будут новыми или даже непонятными для других носителей языка. Эта особенность символических языков, с одной стороны, затрудняет общение, а, с другой стороны, позволяет вмещать в один и тот же язык всё больше и больше информации. Традиционная логика и филология были далеки от понимания природы символических языков со свойственной им свободой выбора обозначаемого. Лишь современные науки о языке, и логика в том числе, сумели показать, что символический язык имеет по сути неограниченно много альтернативных интерпретаций.

Но сказанное не следует понимать так, что всё равно, какую семантику выбрать. Для науки о рассуждениях, т.е. для логики, наиболее значимой является семантика истинностных таблиц.

Для проектирования электрических устройств важнее семантика контактно-релейных схем. И т.д. Мы уже знаем, что разные семантики акцентируют наше внимание на разных аспектах логики высказываний (вспомним, что для логики существенны формулы-законы, а для синтеза контактно-релейных схем они вообще не нужны).

§8. Аксиоматическое исчисление высказываний

Поставим следующую проблему. Можно ли в языке логики высказываний распознавать законы по чисто синтаксическим признакам выражающих их формул? Оказывается, ответ утвердительный. Без обращения к семантическим характеристикам, по одному лишь виду формул можно установить, будет ли эта формула законом. Решается поставленная проблема разными способами. Одним из способов является знаменитый *аксиоматический метод.* Некоторые утверждения принимаются в качестве аксиом. Затем из аксиом по правилам логики выводятся следствия. Если в качестве аксиом берутся логические законы и принятые правила вывода корректно воспроизводят отношение логического следования, то в процессе выведения следствий из аксиом будут получаться только законы.

Аксиомы вместе с правилами вывода образуют *аксиоматическую систему.* Если аксиоматическая система формулируется только на основе синтаксических построений, без всяких ссылок на семантику, то такая система называется *формальной аксиоматической системой* или *аксиоматическим исчислением.* Можно, как мы увидим, строить разные аксиоматические исчисления высказываний. Начать хотелось бы с более компактного построения. Такая возможность у нас есть благодаря наличию полных систем логических связок, содержащих всего одну связку. Однако аксиоматическое исчисление, сформулированное в таком языке, было бы слишком далеко от естественных рассуждений. Можно взять полную систему, в которой имеется всего две связки (так что язык исчисления будет достаточно простым), и в то же время сохранится преемственность с естественными способами рассуждений. В качестве такой полной системы связок возьмём $\{\to, \neg\}$. Выше было показано, что через импликацию и отрицание можно выразить любое высказывание.

Система P_0.

Алфавит системы P_0 не содержит других логических связок, кроме $\neg$ и $\rightarrow$. Определение формулы в P_0 получается сужением определения формулы на алфавит рассматриваемой системы.

Каковы бы ни были формулы А, В и С системы P_0, следующие формулы являются аксиомами в P_0.

А1. $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$ (закон утверждение консеквента);

А2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (закон самодистрибутивности импликации);

А3. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (закон обратной контрапозиции).

Имеется единственное правило вывода из перечисленных аксиом — modus ponens (сокращенно м.п.): если имеются посылки А и $(A \rightarrow B)$, то от них разрешается переходить к заключению В. Схематически

$$\frac{A, \quad (A \rightarrow B)}{B}$$

Как видите, система P_0 очень компактна. В ней всего три схемы аксиом и одно правило вывода. На самом деле число аксиом в P_0 *бесконечно*! Действительно, в качестве А, В и С можно брать любые конкретные формулы, не содержащие иных логических связок, кроме импликации и отрицания. В результате будет получаться конкретный *вариант* соответствующей аксиомной схемы. Например, пусть А есть $(p \rightarrow \neg q)$, а В есть $(r \rightarrow s)$. Тогда формула $((p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)))$ является аксиомой в P_0, поскольку она — вариант схемы А1, т.е. вариант закона утверждения консеквента.

Введём важнейшее понятие доказательства. То, что современная логика сумела строго определить понятие доказательства, является её величайшим достижением. Веками люди доказывали, опираясь на интуицию и здравый смысл. Иногда такая деятельность бывала более или менее успешной (в математике, например, хотя и там возникали проблемы), но чаще предлагаемые доказательства, несомненные для одних, вызывали критику со стороны других. Скажем, Р.Декарт был уверен, что ему удалось доказать объективность своего собственного существования. Он рассуждал примерно так. Размышления позволяют усомниться во всём — в существовании бога, внешнего мира, в собственном существовании. Но всё же есть нечто несомненное — несомненным остаётся сам факт данного в мысли сомнения. Отсюда знаменитое декартовское cogito, ergo sum (мыслю, следовательно существую). Доказательство перед нами или нет? Наряду со многими другими, это рассуждение отверг Т.Гоббс. По его мнению, выводить из «я мыслю» утверждение «значит, я существую» – это всё равно, что выводить из «я прогуливаюсь» суждение «значит, я прогулка». Кто здесь прав?

И уж совсем плохо обстояли дела, когда что-то доказать не удавалось. В математике веками пытались вывести пятый постулат (о параллельных) Евклида из других предложенных им геометрических аксиом. А что, если некоторое высказывание невозможно вывести из аксиом? Но прежде, чем утверждать, что что-то *недоказуемо*, надо суметь разобраться, что значит *доказуемо*. Когда с этим разобрались, тогда выяснилось, что пятый постулат из упомянутых аксиом не выводится, в этой аксиоматике он не доказуем.

Логика располагает разными уточнениями того, что такое доказательство. Наиболее простое определение удаётся сформулировать именно для случая доказательств в формальных аксиоматических системах. Мы дадим такое определение, которое пригодно для любых аксиоматических исчислений (разумеется, и для исчисления P_0)

Доказательством *называется конечная последовательность формул (одна или более), каждая из которых является либо аксиомой, либо получается из предыдущих формул этой последовательности по одному из правил вывода. Последняя формула А такой последовательности называется* **теоремой***, а сама последовательность является доказательством А.*

Условимся писать $\vdash$ А, если существует доказательство А. Знак «$\vdash$» является сокращение для слов «теорема формальной системы» или просто «теорема». Каждый раз надо чётко понимать, о какой формальной системе идёт речь. Ведь может случится так, что А теорема в системе Р, но не теорема в системе Q. Сейчас мы располагаем только системой P_0, поэтому записи с использованием символа «$\vdash$» относятся именно к ней.

Но даже если какая-то предъявленная конечная последовательность формул A_1, A_2, ..., A_n, А является доказательством А, увидеть это бывает нелегко. Поэтому в логике поступают следующим образом. Формулы доказательства выписывают не в строчку, а в виде нумерованного столбца, причём справа от каждой формулы пишут пояснения, на основании чего данная формула внесена в доказательство.

Приведём примеры доказательств в системе P_0.

Докажем, что

$\vdash (A \to (B \to A))$.

1. $(A \to (B \to A))$ — A1.

Полученная последовательность, содержащая только одну формулу $(A \to (B \to A))$, является доказательством. Ведь эта формула совпадает с аксиомой A1, что и указано в пояснении справа от неё. Последняя формула этой последовательности (в данном случае, она же и первая) будет теоремой. Таким образом, имеем право записать $\vdash (A \to (B \to A))$, что и требовалось.

Поскольку аксиома A1 на самом деле схема формул, любой её конкретный вариант также считается доказанным. В частности, формула $((p \to \neg q) \to ((r \to s) \to (p \to \neg q)))$ является вариантом A1, и потому $\vdash ((p \to \neg q) \to ((r \to s) \to (p \to \neg q)))$ в P_0. Можно предъявить явное доказательство последнего утверждения.

1. $((p \to \neg q) \to ((r \to s) \to (p \to \neg q)))$ — A1.

Формула $((p \to \neg q) \to ((r \to s) \to (p \to \neg q)))$ внесена в последовательность на том основании, что она есть вариант аксиомы A1. Значит, $\vdash ((p \to \neg q) \to ((r \to s) \to (p \to \neg q)))$.

Аналогичным образом доказывается, что оставшиеся схемы аксиом и все количественно бесконечные варианты схем аксиом являются теоремами системы P_0. Едва начав работу, мы уже доказали бесконечно много теорем.

Может быть, вы слышали такое мнение: аксиома — это утверждение, принятое без доказательств. В соответствии с введённым точным понятием доказательства, это мнение ошибочно. Без доказательств мы вообще ничего не принимаем. Просто доказательства аксиом тривиальны, ибо *аксиома* — это такое утверждение, которое само себя доказывает.

Нельзя ли в P_0 доказать нечто нетривиальное? Разумеется, в этой системе доказуемы формулы, не являющиеся частными случаями аксиом. Сейчас докажем формулу, которая будет короче любой аксиомы.

Докажем, что

$\vdash (A \to A)$.

1. $(A\to((B\to A)\to A))\to((A\to(B\to A))\to(A\to A))$ — (A2);
2. $(A\to((B\to A)\to A))$ — (A1);
3. $(A\to(B\to A))\to(A\to A)$ — 2, 1 м.п.;
4. $(A\to(B\to A))$ — A1;
5. $(A\to A)$ — 4, 3 м.п.

Первый шаг состоял в том, что мы взяли вариант схемы аксиом A2. Только, в отличие от предыдущих случаев, этот вариант сам является схемой. Не вышли ли мы тут за рамки схемы A2, может быть, это вообще новая схема? Схема A2 есть $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$, где A, B и C – *любые* формулы. В частности, раз C – любая формула, C может совпадать с A. Тогда A2 превращается в вариант $(A \to (B \to A)) \to ((A \to B) \to (A \to A))$. Поскольку B – тоже любая формула, мы можем вместо B взять не все формулы, а только те, которые имеют структуру $(B \to A)$. Подставляя эту структуру вместо B в только что записанный вариант A2, получаем новый вариант $(A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A))$ всё той же исходной схемы A2.

Второй шаг аналогичен предыдущему. На третьем шаге впервые применено единственное правило вывода системы P_0 – modus ponens. В анализе справа не только сказано, что применяется м.п., но и указано, к каким формулам и в каком порядке оно применяется. Четвёртый и пятый пункты доказательства теперь очевидны.

Последней формулой доказательства является $(A \to A)$ и, следовательно, это теорема нашей системы: $\vdash (A \to A)$. Вновь перед нами не конкретная формула, а схема формул. Подставляя вместо A любые формулы или схемы формул, мы будем получать варианты теоремы $(A \to A)$, перед которым сохраняется знак «$\vdash$»: $\vdash (p \to p)$, $(\neg q \to \neg q)$, $((A \to \neg B) \to (A \to \neg B))$ и т.д.

Наряду с понятием доказательства, в логике используется более общее понятие вывода из посылок (наряду с термином «посылка» используются также термины «допущение» и «гипотеза»). В качестве посылок разрешается брать любые конкретные формулы или схемы формул.

Выводом *называется конечная последовательность формул, каждая из которых есть либо посылка, либо аксиома, либо получена из предыдущих формул этой последовательности по одному из правил вывода*[6]*. Последняя формула вывода называется* **заключением**.

Если последовательность формул $B_1, B_2, ..., B_n$, A является выводом формулы A из посылок $C_1, C_2, ..., C_m$ то пишем $C_1, C_2, ..., C_m \vdash A$. Читается эта запись так: «Из посылок (допущений, гипотез) $C_1, C_2, ..., C_m$ выводится (заключение) A». Очевидно, что если $m = 0$ (т.е. множество посылок пусто), то имеем $\vdash A$. Другими словами, вывод, в котором отсутствуют посылки, превращается в доказательство. Соответственно, заключение такого вывода становится теоремой. Сказанное означает, что доказательства являются частными случаями выводов.

Приведем пример логического вывода из гипотез в P_0.

1. $A \to (A \to B)$ — доп.
2. A — доп.
3. $A \to B$ — 2, 1 м.п.
4. B — 2, 3 м.п.

В соответствии с определением, перед нами вывод $(A \to (A \to B)), A \vdash B$.

В математических доказательствах часто применяют следующий прием. Допустим, необходимо доказать утверждение вида «Если A, то B». Принимается гипотеза A, и из нее пытаются вывести B. Если получилось, заключают: следовательно, верно «Если A, то B». В аксиоматическом исчислении высказываний этому приёму соответствует важная теорема дедукции, которую примем без доказательства. Точнее, надо было бы сказать *метатеорема* и *метадоказательство*, поскольку теорема формулируется и доказательство проводится не средствами системы P_0, а средствами метаязыка. Но для того, чтобы не загромождать речь, мы будем допускать использование слов «теорема» и «доказательство» и по отношению к соответствующим построениям метаязыка, подобно тому, как мы позволяем называть схемы аксиом системы P_0 формулами, а не метаформулами.

Следует учесть, что теорема дедукции верна не для всех аксиоматических систем, но для P_0 и для всех других систем, которые будут рассмотрены в этой книге, она действует.

Метатеорема дедукции. *Если $C_1, C_2, \ldots, C_m, A \vdash B$, то $C_1, C_2, \ldots, C_m \vdash (A \to B)$. В частности, если $m = 0$, то из $A \vdash B$ получаем $\vdash (A \to B)$.*

Теорему дедукции можно применять многократно. Вывод $C_1, C_2, \ldots, C_m \vdash (A \to B)$ в соответствии с ней перестраивается в вывод $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1} \vdash (C_m \to (A \to B))$, затем в вывод $C_1, C_2, \ldots, C_{m-2} \vdash (C_{m-1} \to (C_m \to (A \to B)))$ и т.д., вплоть до одно-посылочного вывода $C_1 \vdash (C_2 \to (C_3 \to \ldots\ldots \to (C_m \to (A \to B))\ldots))$. К последнему выводу ещё раз применим теорему дедукции и устраним последнюю посылку C_1: $\vdash (C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to \ldots\ldots \to (C_m \to (A \to B))\ldots)))$. Таким образом, теорема дедукции позволяет путем последовательного сокращения посылок превратить любой вывод в доказательство.

Рассмотрим простейший вывод

1. A — доп.

Это действительно вывод, т.к. перед нами конечная последовательность формул, каждая из которых является либо *допущением*, либо... – впрочем, дальнейшее в данном случае неважно. Последняя формула этой последовательности является заключением вывода. Значит, перед нами вывод из посылки A формулы A, т.е. $A \vdash A$. По теореме дедукции имеем $\vdash (A \to A)$. Насколько проще доказательство теоремы $(A \to A)$ при помощи теоремы дедукции, чем без неё!

Выше был построен вывод $(A \to (A \to B)), A \vdash B$. Превратим его в теорему, дважды применяя теорему дедукции:

$(A \to (A \to B)) \vdash (A \to B)$,

$\vdash ((A \to (A \to B)) \to (A \to B))$.

Попытайтесь без применения теоремы дедукции доказать эту теорему в P_0.

Читатель проникнется ещё большей любовью к теореме дедукции, если попробует без неё доказать транзитивность импликации, т.е.

$\vdash ((A \to B) \to ((B \to C)\to(A \to C)))$.

Найти доказательство с использованием данной метатеоремы совсем не сложно.

1. $(A \to B)$ – доп.
2. $(B \to C)$ – доп.
3. A – доп.
4. B – 3, 1 м.п.
5. C – 4, 2 м.п.

Последовательность 1–5 является выводом из посылок $(A \to B)$, $(B \to C)$ и A формулы C. Значит, имеем право записать

$(A \to B), (B \to C), A \vdash C$.

Трижды применяя метатеорему дедукции, последовательно получаем

$(A \to B), (B \to C) \vdash (A \to C)$,

$(A \to B) \vdash ((B \to C) \to (A \to C))$,

и, наконец,

$\vdash ((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$,

что и требовалось. Эта теорема нам скоро понадобится, как и следующая.

Докажем

$\vdash ((A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C)))$.

1. $(A \to (B \to C))$ – доп.
2. B – доп.
3. A – доп.

4. $(B \to C)$ — 3, 1 м.п.
5. C — 2, 4 м.п.

Следовательно, имеем вывод

$(A \to (B \to C)), B, A \vdash C$.

По теореме дедукции

$(A \to (B \to C)), B \vdash (A \to C)$,

$(A \to (B \to C)) \vdash (B \to (A \to C))$,

$\vdash ((A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C)))$.

Заключим соглашение о сокращенной записи доказательств. Если мы уже доказали ранее, что $\vdash A$, то в последующих доказательствах, использующих A, договоримся не вставлять снова и снова доказательство A, но будем ссылаться на A как на ранее доказанную теорему (сокращённо док.). Это соответствует обычной практике: никто не доказывает вновь то, что уже было однажды доказано.

Пусть T — теорема исчисления P_0 и A — любая формула. Т.к. имеется аксиома A1, которая может принимать вид $(T \to (A \to T))$, то всегда из нее и теоремы T можно по м.п. получить $\vdash (A \to T)$. Действительно,

1. T — док.
2. $(T \to (A \to T))$ — A1
3. $(A \to T)$ — 1, 2 м.п.

Это не доказательство, а пример схемы доказательства, которая превратится в сокращённое доказательство, если вместо T возьмём какую-либо теорему, и в полное доказательство, если вместо T подставим само доказательство T. Имея в виду данную схему доказательства, можно сразу писать «$(A \to T)$ — теорема» или «$\vdash (A \to T)$», если T уже доказана.

Настала пора заняться специфическими свойствами отрицания. Здесь уже теорема дедукции не столь всемогущественна, так что придётся потрудиться, чтобы найти доказательство.

Докажем принципиальную теорему

$\vdash (\neg A \to (A \to B))$.

1. $(\neg A \to (\neg B \to \neg A))$ — A1
2. $(\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)) \to (\neg A \to (A \to B)))$ — док.
3. $(((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)) \to (\neg A \to (A \to B)))$ — 1, 2 м.п.
4. $((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$ — A3
5. $(\neg A \to (A \to B))$ — 4, 3 м.п.

Ключевой шаг в этом доказательстве — второй. Формула, введённая на втором шаге, является ничем иным, как вариантом доказанной выше теоремы транзитивности импликации $\vdash$

$((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$. Формула пункта 2 доказательства получается, если в схеме транзитивности A заменить на $\neg A$, B заменить на $(\neg B \to \neg A)$, а C заменить на $(A \to B)$.

Теперь совсем просто доказать похожую теорему
$\vdash (A \to (\neg A \to B)$.

1. $(\neg A \to (A \to B))$ — док.
2. $((\neg A \to (A \to B)) \to (A \to (\neg A \to B)))$ — док.
3. $(A \to (\neg A \to B))$ — 1, 2 м.п.

Любая из двух только что доказанных теорем напоминает о грозной опасности, подстерегающей рассуждающих. Если найдётся такая формула A, что $\vdash A$ и $\vdash \neg A$, то для любой формулы B используемого языка в силу этих теорем теоремой будет и B: $\vdash B$.

Действительно, допустим, нашлась такая формула A, что $\vdash A$ и $\vdash \neg A$. Тогда построим доказательство следующего вида.

1. A — док. (по допущению)
2. $\neg A$ — док. (по допущению)
3. $(A \to (\neg A \to B))$ — док.
4. $(\neg A \to B)$ — 1, 3 м.п.
5. B — 2, 4 м.п.

Таким образом, $\vdash B$. Повторим, что B здесь — любая формула. Тогда получается, что всё доказуемо и ничего недоказуемого, в рамках используемого языка, нет. И мы станем софистами поневоле.

Исчисления, в которых имеется формула A такая, что $\vdash A$ и $\vdash \neg A$, называются *противоречивыми*. Исчисление *абсолютно противоречиво*, если для любой формулы A этого исчисления доказуема теорема $\vdash A$. В силу каждой из теорем $\vdash (\neg A \to (A \to B))$ или $\vdash (A \to (\neg A \to B))$, понятия противоречивости и абсолютной противоречивости в отношении системы P_0 совпадают. Мы уже видели, что противоречивость влечёт абсолютную противоречивость. Верно и обратное: если P_0 абсолютно противоречивая система, то в ней теоремами будут все формулы и, значит, будет $\vdash A$ и $\vdash \neg A$, т.е. P_0 будет противоречивой. Ясное дело, будь исчисление P_0 противоречивым, оно было бы бесполезным. К счастью, имеет место следующая метатеорема.

Метатеорема о непротиворечивости системы P_0. *Не существует такой формулы A, что и $\vdash A$, и $\vdash \neg A$ в P_0 .*

Эта метатеорема является следствием следующей.

Метатеорема о семантической корректности системы P_0. *Если $\vdash A$, то $\models A$.*

Доказательство. Каждая аксиома теории P_0 является логическим законом (проверьте). Как было продемонстрировано в §3 данной главы, правило modus ponens обладает следующим свойством: если $\models A$ и $\models (A \to B)$, то $\models B$ (наверное, проще самостоятельно заново это доказать, чем найти соответствующее рассуждение в указанном параграфе). Получается, что применяя modus ponens к аксиомам, мы на выходе этого правила получим законы в качестве теорем. Применяя, далее, modus ponens к теоремам, мы опять получим законы и т.д., до бесконечности. В итоге в системе P_0 мы не получим ничего, кроме законов. Таким образом, $\vdash A \Rightarrow\ \models A$, что и требовалось доказать.

Отсюда вытекает теорема о непротиворечивости P_0. Если бы P_0 было противоречивым, нашлась бы формула A такая, что $\vdash A$ и $\vdash \neg A$. По теореме корректности, тогда должно быть $\models A$ и $\models \neg A$, что невозможно. Поэтому исчисление P_0 непротиворечиво.

Превратить P_0 в противоречивую систему легко. Достаточно присоединить к ней в качестве новой аксиомы отрицание какой-нибудь ранее доказанной теоремы. Например, присоединение к P_0 аксиомы $\neg(A \to A)$ сделает её и противоречивой, и абсолютно противоречивой.

Непротиворечивость и семантическая корректность – это ещё не всё, что можно потребовать от исчисления. Представим исчисление P_+, которое сформулировано в том же языке $\{\to, \neg\}$ и получается из P_0 отбрасыванием третьей схемы аксиом. В этой новой системе можно доказать всё, что в прежней доказывалось без использования A3. Это не означает, что ничего нельзя доказать про отрицание. По-прежнему будет доказуем, например, вариант закона тождества $(\neg A \to \neg A)$ (ведь при доказательстве $(A \to A)$ A3 не требовалась). Но вот сама аксиома A3 уже не будет теоремой системы P_+. (Доказательство связано с проблемой установления независимости аксиом, которая в этой книге не рассматривается.)

Хотелось бы иметь такое исчисление, в котором доказуем любой закон логики высказываний. Исчисления, для который верна метаимпликация $\models A \Rightarrow\ \vdash A$, называются *семантически полными*. (Не следует путать семантическую полноту и полноту логических связок. Это разные понятия.)

Метатеорема о семантической полноте системы P_0. *Если* $\models A$, *то* $\vdash A$.

Таким образом, система P_0 семантически полна, а система P_+ не является семантически полной. Доказательство этой метатеоремы технически сложное, и мы его опустим.

Объединим метатеоремы о семантической корректности и полноте P_0:

$$\models \mathbf{A} \Leftrightarrow \ \vdash \mathbf{A}.$$

В действительности это утверждение для P_0 можно усилить. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – формулы. Тогда

$$\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n} \models \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n} \vdash \mathbf{A}.$$

Значит, если из посылок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ логически следует A, то существует вывод в P_0 из посылок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ формулы A. И наоборот, если построен вывод в P_0 из посылок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ формулы A, то из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ логически следует A. Обозначим произвольное (возможно, пустое) множество посылок греческой буквой Г. Это позволяет короче записать только что сформулированную метатеорему:

$$\Gamma \models \mathbf{A} \Leftrightarrow \Gamma \vdash \mathbf{A}.$$

В заключение построим ещё одно аксиоматическое исчисление высказываний P_1. В отличие от системы P_0, которая была сформулирована в бедном (хотя и полном) языке $\{\rightarrow, \neg\}$, новая формальная система P_1 использует более богатый язык $\{\&, \vee, \rightarrow, \neg\}$, что делает её менее искусственной.

Аксиомами P_1 являются следующие схемы формул.

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $(A \& B) \rightarrow A$
4. $(A \& B) \rightarrow B$
5. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \& B))$
6. $A \rightarrow (A \vee B)$
7. $B \rightarrow (A \vee B)$
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
9. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
10. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
11. $\neg\neg A \rightarrow A$

Единственное правило вывода – modus ponens.

Данные выше определения доказательства и вывода, как мы подчёркивали, действуют для всех формальных аксиоматических систем, и потому без изменений переносятся на P_1. Исчисление P_1 также непротиворечиво, семантически корректно и семантически полно. Отсюда вытекает, что импликативно-негативная (т.е. построенная только из $\to$ или $\neg$) формула A доказуема в P_0 тогда, и только тогда, когда A доказуема в P_1. Короче это можно записать так: если A импликативно-негативная формула, то $\vdash_0 A \Leftrightarrow \vdash_1 A$. Здесь префиксы «$\vdash_0$» и «$\vdash_1$» означают, соответственно, доказуемость в P_0 и доказуемость в P_1.

На этом мы временно закончим работу с аксиоматическими формальными системами, но вернёмся к ним в третьей части книги.

§9. Натуральное исчисление высказываний

Наверное, некоторым читателям доказательства и выводы в формальной аксиоматике показались непонятными. Действительно, рассуждения в формальных аксиоматических системах зачастую отличаются непрозрачностью. Конечно, как только доказательство предъявлено, проверка его на правильность становится задачей рутинной, которую можно перепоручить компьютеру. Но бывает неясно, *как находить* нужные варианты схем аксиом в нужной последовательности, чтобы получить в итоге требуемое доказательство или вывод. Сказанное особенно касается доказательств, которые выглядят порой прямо-таки упавшими с неба и не дают никакой пищи интуиции. Даже в гораздо менее искусственной, чем P_0, системе P_1 рассуждать (т.е. доказывать или выводить) приходится при помощи средств и приёмов, далёких от принятых в реальных рассуждениях методов.

Могло бы случиться так, что от упомянутой искусственности избавиться было бы нельзя. Вообразим, что перед нами стоит жёсткая альтернатива: либо утонуть в болоте двусмысленностей естественного языка, либо пользоваться формальной аксиоматикой. Желающему использовать логику на практике пришлось бы волей-неволей выбрать вторую альтернативу. К счастью, логики сумели создать формальные системы, которые, не уступая по строгости аксиоматическим, оказываются максимально приближенными к естественным рассуждениям. Поэтому такие системы и назвали *натуральными*.

В натуральных системах куда более удобно рассуждать, чем в аксиоматических. Однако они уступают аксиоматическим системам в компактности и в простоте. В них сложнее определения доказательства и вывода, метатеоремы об их свойствах зачастую приходится доказывать более громоздкими способами и т.п. Однако в этой книге нас, в первую очередь, интересуют методы рассуждений, а не изучение логических систем как таковых. Поэтому в качестве той логической теории рассуждений, которой мы будем реально пользоваться, мы без колебаний выбираем систему натурального исчисления.

Основу натуральных исчислений составляют не аксиомы, а правила вывода. Среди правил выделяют правила *введения* и правила *удаления* логических связок и других логических знаков. В нашей системе будет ещё своего рода нулевое правило, позволяющее из посылки выводить её саму. Кроме того, все правила делятся на прямые и косвенные. С формальной точки зрения, правило является *косвенным*, если в его формулировке используется знак выводимости $\vdash$; в противном случае правило является *прямым*.

Содержательный смысл этого деления заключается в следующем: в аксиоматических системах переходят от формул к формулам. Это прямой путь рассуждений. В натуральных системах разрешается (наряду с переходом от формул к формулам) переход от выводов к выводам. Такие рассуждения будут косвенными. На самом деле уже в аксиоматике мы всё-таки прибегли к одному косвенному способу рассуждений. Когда мы использовали теорему дедукции, мы переходили от одних выводов к другим выводам. А это косвенное рассуждение. Насколько теорема дедукции облегчала нам поиск выводов, вы уже имели возможность оценить. В системе P_N теорема дедукции воплощена в исходном правиле введения импликации – лишь одном из пяти косвенных правил. Можно представить, как сравнительно нетрудно будет строить выводы, используя все косвенные правила.

Конкретную систему натурального исчисления высказываний, которую мы сейчас построим, обозначим буквами P_N.

Правила вывода P_N

Правило рефлексивности (р)

$$\frac{A}{A}$$

Правила введения знаков	*Правила удаления знаков*
Введение конъюнкции (&в)	Удаление конъюнкции 1 (&у1)
$\dfrac{A,\ B}{(A \,\&\, B)}$	$\dfrac{(A \,\&\, B)}{A}$

Введение дизъюнкции 1 (∨в1)

$$\frac{A}{(A \vee B)}$$

Удаление конъюнкции 2 (&у2)

$$\frac{(A \;\&\; B)}{B}$$

Введение дизъюнкции 2 (∨в2)

$$\frac{B}{(A \vee B)}$$

Удаление дизъюнкции (∨у)

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, (A \vee B) \vdash C}$$

Введение импликации (→в)

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash (A \to B)}$$

Удаление импликации (→у)

$$\frac{A, (A \to B)}{B}$$

Введение отрицания (¬в)

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Удаление отрицания (¬у)

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Введение выводимости (⊢в)

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, \psi_{n+1}, \ldots, \psi_m, A}{A_1, \ldots, A_n \vdash A}$$

Удаление выводимости (⊢у)

$$\frac{\vdash A}{A}$$

Правило рефлексивности р, а также правила введения конъюнкции, введения дизъюнкции 1 и 2, удаления конъюнкции 1 и 2, удаления импликации и удаления отрицания, являются прямыми. Правила введения импликации, введения отрицания, введения выводимости, удаления дизъюнкции и удаления выводимости являются косвенными. Таким образом, из тринадцати правил системы P_N восемь правил относится к прямым, а пять – к косвенным.

Но особенно легко получать выводы, если для этого достаточно использовать лишь одни прямые правила. В формулировках прямых правил над чертой стоят формулы, являющиеся посылками правила, а под чертой – его заключение, которое также есть формула.

Прямым выводом в P_N *называется непустая конечная последовательность формул, каждая из которых есть либо посылка, либо получена из предыдущих формул последовательности по одному из прямых правил вывода. При этом последняя формула не должна быть посылкой.*

Данное определение по сути не отличается от определения вывода в аксиоматической системе. Приведём несколько примеров построения прямых выводов.

Если вы отличник и спортсмен, то отсюда, разумеется, можно вывести, что вы спортсмен.

1. $(A \& B)$ — доп.
2. B — 1, &у2.

В этом простейшем прямом выводе к единственной посылке $(A \& B)$ применено второе правило удаления конъюнкции.

Не намного сложнее преобразовать предыдущий вывод в прямой вывод из конъюнкции дизъюнкции.

1. $(A \& B)$ — доп.
2. B — 1, &у2
3. $(A \vee B)$ — 2, ∨в2

Вывод из конъюнкции $(A \& B)$ дизъюнкции $(A \vee B)$ можно получить и другим путём.

1. $(A \& B)$ — доп.
2. A — 1, &у1
3. $(A \vee B)$ — 2, ∨в1

Здесь не тот же самый вывод, поскольку на втором и третьем шагах использовалось *другое* правило. В действительности это общая ситуация. Из одних и тех же посылок одно и то же заключение можно, в принципе, выводить разными способами.

Приведём ещё один пример на эту тему. Рассмотрим следующую пару выводов одного и того же заключения из одной и той же посылки.

1. $(A \& B)$ — доп.
2. A — 1, &у1
3. B — 1, &у2
4. $(B \& A)$ — 3, 2 &в

Есть и другой способ показать, что члены конъюнкции можно переставлять местами.

1. $(A \& B)$ — доп.
2. B — 1, &у2
3. A — 1, &у1
4. $(B \& A)$ — 2, 3 &в

На этот раз в обоих выводах использовались одинаковые правила. Однако *порядок* применения правил различен, так что перед нами разные выводы.

Рассмотрим уже знакомое рассуждение о Машином здоровье. Если Маша курит или пьёт, то Маша вредит своему здоровью. Но Маша курит. Отсюда напрямую вытекает, что Маша вредит своему здоровью.

1. $((A \vee B) \rightarrow C)$ — доп.

2. A — доп.
3. $(A \vee B)$ — 2, $\vee$в1
4. C — 3, 1 $\rightarrow$у

В этом прямом выводе на последнем 4 шаге использовалось правило удаления импликации, которое только названием отличается от хорошо вам известного правила modus ponens.

Помимо прямых выводов, система P_N позволяет строить косвенные выводы. Но прежде, чем перейти к косвенным выводам, введём ряд новых обозначений и терминов, а также сделаем несколько замечаний общего характера.

Пусть дана последовательность выражений $\psi_1, ..., \psi_m$, являющаяся выводом. Если заключительное выражение вывода ψ_m есть формула A, выпишем, в порядке их появления, все формулы, использованные в данном выводе в качестве посылок. Получим некоторую последовательность формул $A_1, ..., A_n$. В этом случае будем говорить, что *существует вывод формулы* A *из посылок* $A_1, ..., A_n$ и использовать запись $A_1, ..., A_n \vdash A$ или, положив $\{A_1, ..., A_n\} = \Gamma$, более краткую запись $\Gamma \vdash A$, используя знак выводимости «$\vdash$», за которым закрепилось наименование «штопор».

Между утверждением о существовании вывода $\Gamma \vdash A$ и самим выводом $\psi_1, ..., \psi_m$ примерно такая же разница, как между утверждением о существовании автомобильной дороги между Москвой и Петербургом и детально разработанным маршрутом поездки из одной столицы в другую. Запись вида $\Gamma \vdash A$ указывает только пункт отправления Γ и пункт прибытия A, утверждая при этом, что существует путь из Γ в A. Последовательность $\psi_1, ..., \psi_m$ не только содержит информацию о пункте отправления и пункте прибытия, но и подробно описывает все промежуточные пункты, которые ведут к цели. И, подобно тому, как из Москвы в Петербург ведут различные пути, так и утверждению о существовании вывода $\Gamma \vdash A$ могут соответствовать разные конкретные выводы, как мы видели это раньше.

Казалось бы, что более подробная информация всегда более предпочтительна, однако это не так. Мы нуждаемся не только в развертывании информации, но и в ее сжатии. Продолжая начатую аналогию, мы можем вначале поинтересоваться, есть ли вообще путь из пункта М в пункт П, и лишь получив утвердительный ответ, начать этот путь искать. Более того, прежде, чем что-то искать, надо указать предмет поиска. Прежде, чем искать дорогу, надо знать, откуда и куда мы отправляемся. Нельзя найти дорогу, если не знаешь, куда идешь. Точно так же в случае выводов мы *вначале* формулируем задачу на выводимость в виде $A_1, ..., A_n \vdash A$ и лишь *затем* приступаем к поиску конкретного вывода вида $A_1, ..., A_n, \psi_{n+1}, ..., \psi_m, A$. Эта задача может иметь несколько решений, среди которых могут быть более удачные, – более короткие, например, – и менее удачные, но может вообще не иметь ни одного решения. Например, бесполезно искать вывод вида $A \vee B \vdash A$. Поэтому утверждение о существовании вывода, как и всякое непроверенное утверждение, может оказаться ложным. В любом случае, без записей о существовании выводов вида $\Gamma \vdash A$ просто трудно обойтись в процессе реальных рассуждений. Как мы видели, записи такого рода применялись и в рассмотренных ранее аксиоматических системах, однако там они находились на мета уровне и в принципе можно было их не использовать. В системы натурального вывода записи вида $\Gamma \vdash A$ входят на базисном уровне, поскольку применяются при формулировке ряда правил вывода. В некотором смысле в системе натурального вывода записи о существовании выводов уподобляются формулам (поскольку в процессе рассуждений мы переходим не только от формул к формулам, но и от утверждений о существовании одних выводов к утверждениям о существовании других выводов), но всё-таки мы должны отличать их от обычных формул (в смысле данного выше определения понятия правильно построенной формулы). Однако выражение «утверждение о существовании вывода» оказывается слишком длинным и неудобным при частом использовании. Высказанные замечания мотивируют принятие следующего определения.

Штопор-формулой *назовём всякое выражение вида* $A_1, ..., A_n \vdash A$, где $A_1, ..., A_n, A$ – *формулы и* $n \geq 0$ *(при* $n = 0$ *получаем штопор-формулу* $\vdash A$*).*

Подчеркнем, что согласно определению, штопор-формула – это не формула (подобно тому, как кентавр или конь-человек – это не человек), а последовательность формул, последняя из которых отделена от остальных знаком выводимости $\vdash$. Поэтому (в отличие от формул) штопор-формулы не могут быть использованы при построении новых штопор-формул. Иными словами, в последовательность $A_1, ..., A_n, A$ не должны входить какие бы то ни были штопор-формулы. Это означает, в частности, что знак выводимости $\vdash$ в любой штопор-формуле встречается ровно один раз. При $n = 0$ штопор-формула приобретает вид $\vdash A$, но это опять-таки не формула, поскольку в данном выражении использован знак $\vdash$.

Разъясним теперь правило $\vdash$в, ссылаясь на общее понятие вывода, точное определение которого будет дано позднее.

Пусть $A_1, ..., A_n$ *– формулы и* $A_1, ..., A_n, \psi_{n+1}, ..., \psi_m, A$ *– последовательность выражений, являющаяся выводом из посылок* $A_1, ..., A_n$ *формулы* A *или, при* $n = 0$*, выводом вида* $\psi_{n+1}, ..., \psi_m, A$. *Тогда применимо следующее* **штопор-правило** *введения выводимости* ($\vdash$в).

$$\frac{A_1, ..., A_n, \psi_{n+1}, ..., \psi_m, A}{A_1, ..., A_n \vdash A}$$

При $n = 0$ правило $\vdash$в приобретает укороченный вид.

$$\frac{\psi_{n+1}, ..., \psi_m, A}{\vdash A}$$

Как видно, штопор-правило $\vdash$в позволяет вывод формулы преобразовать в утверждение о существовании вывода, т.е. в некоторую штопор-формулу. Внося штопор-формулу в вывод под очередным номером, мы справа от нее должны указать номера шагов, на которых были получены каждое из выражений $A_1, ..., A_n, \psi_{n+1}, ..., \psi_m$, A, образующие исходный вывод, и поставить знак «$\vdash$в» для указания на применение штопор-правила $\vdash$в.

Заметим на будущее, что в выводе $A_1, ..., A_n, \psi_{n+1}, ..., \psi_m$, A выражения $A_1, ..., A_n$, A являются формулами, но вот выражения $\psi_{n+1}, ..., \psi_m$ (которые потому и обозначены другими буквами) формулами быть не обязаны. Среди $\psi_{n+1}, ..., \psi_m$ могут встречаться как формулы, так и штопор-формулы.

Рассмотрим следующий пример.

1. A & B	– доп.
2. B	– 1, &у2
3. A	– 1, &у1
4. B & A	– 2,3 &в
5. A & B $\vdash$ B & A	– 1-4 $\vdash$в.

Шаги 1-4, образуют ранее полученный прямой вывод, посылкой которого является формула A & B, а заключением – формула B & A. Значит, мы имеем право применить к этому выводу штопор-правило $\vdash$в, что и сделано на шаге 5. В анализе справа указано, к какой последовательности выражений применено $\vdash$в. Полученная на заключительном 5 шаге штопор-формула A & B $\vdash$ B & A считается, по определению, *доказанной*, а вся последовательность 1-5 образует *вывод*. Но мы не имеем права говорить, что штопор-формула A & B $\vdash$ B & A получена из посылки A & B. В противном случае возникла бы запрещенная конструкция A & B $\vdash$ A & B $\vdash$ B & A, содержащая два вхождения знака выводимости $\vdash$. Вместо этого следует просто сказать: на шагах 1-5 *был построен вывод штопор-формулы* A & B $\vdash$ B & A или *была доказана штопор-формула* A & B $\vdash$ B & A. Эти формулировки можно развернуть в следующее более подробное сообщение: было доказано *существование* вывода из посылки A & B формулы B & A (шаги 1-5) путем построения конкретного *вывода* (шаги 1-4) формулы B & A из посылки A & B.

Докажем ещё несколько штопор-формул, продолжив построенные выше прямые выводы.

1. (A & B)	– доп.
2. B	– 1, &у2.
3. (A & B) $\vdash$ B	– 1-2, $\vdash$в

1. (A & B)	– доп.
2. B	– 1, &у2
3. $(A \vee B)$	– 2, $\vee$в2
4. (A & B) $\vdash$ $(A \vee B)$	– 1-3, $\vdash$в

1. $((A \vee B) \to C)$	– доп.
2. A	– доп.
3. $(A \vee B)$	– 2, $\vee$в1
4. C	– 3, 1 $\to$у
5. $((A \vee B) \to C)$, A $\vdash$ C	– 1-4, $\vdash$в

Как мы только что видели, прямой вывод $A_1, ..., A_n, \psi_{n+1}, ..., \psi_m$, A формулы A из посылок $A_1, ..., A_n$ посредством применения штопор-правила $\vdash$в сворачивается в доказанное утверждение $A_1, ..., A_n \vdash A$, говорящее о существовании вывода формулы A из посылок $A_1, ..., A_n$ в абстрактной форме, без указания конкретных шагов вывода.

Таким образом, мы имеем как сам *вывод*, так и доказанное *утверждение* о существовании этого вывода. Последнее очень важно для дальнейших рассуждений в нашей натуральной системе, т.к. в процессе последующих построений выводов могут использоваться не сами ранее построенные выводы, а утверждения об их существовании. В результате, говоря неформально, выводы в нашей системе оказываются в сущности *последовательностями утверждений*, хотя выводы строятся из переходов двух типов: во-первых, это переходы от одних высказываний к другим (нам пришлось в этой связи четко различить формулы-высказывания и штопор-высказывания); во-вторых, это переходы от выводов формул к высказываниям (точнее, штопор-высказываниям по штопор-правилу $\vdash$в).

Штопор-правило $\vdash$в играет особую роль. Лишь оно одно разрешает переход от конкретного вывода к утверждению. Все остальные правила, в том числе и косвенные, переходят от утверждений к утверждениям. Так, штопор-правило $\vdash$у разрешает переход от штопор-формулы $\vdash$ A (утверждающей, что существует вывод A из пустого множества посылок) к формуле A.

В любом случае, заключением каждого правила системы P_N является некоторое *утверждение*, которое в итоге и вставляется в строящийся вывод. Можно было развить иную теорию натурального вывода, в которой разрешался бы переход от одних выводов к другим выводам. Так обычно и делается. Но выводы – это не утверждения или высказывания, а более сложные конструкции, так что ценой перехода к такой теории было бы резкое усложнение понятия вывода, что сделало бы это основополагающее понятие трудным для понимания. В рассматриваемой теории P_N переходов от выводов к выводам нет. Благодаря этому понятие вывода в нашей натуральной системе оказывается максимально простым и интуитивно понятным.

До сих пор у нас были лишь примеры выводов и доказанных штопор-формул. Настала пора дать общие определения.

Выводом в P_N *называется конечная последовательность выражений, каждое из которых есть либо 1) посылка, либо 2) доказанная штопор-формула, либо 3) получается из предыдущих выражений последовательности по одному из правил вывода* системы P_N; *при этом последнее выражение не должно быть посылкой.*

Последнее выражение вывода – это его **заключение**.

Штопор-формула является **доказанной** *(или, короче, штопор-формула* **доказана***), если построен вывод, заключением которого она является.*

Формула A **доказана** (A *является* **теоремой**), *если доказана штопор-формула* $\vdash$ A.

Вывод называется **доказательством**, *если его заключением является штопор-формула* $\vdash$ A.

В качестве *посылок* (*допущений*, *гипотез*) разрешается брать любые правильно построенные *формулы*, но не штопор-формулы.

Может показаться, что налицо явный порочный круг: доказанность штопор-формулы определяется через вывод, а в определении вывода, в свою очередь, использовано понятие доказанности. Однако в действительности никакого порочного круга нет, поскольку выше были даны конкретные примеры прямых выводов и доказанных на их основе штопор-формул. Они-то и разрывают круг, поскольку исходно именно на них мы можем ссылаться как на ранее доказанные при построении новых выводов и, соответственно, доказательств новых штопор-формул. Затем, используя эти новые штопор-формулы как ранее доказанные, мы получаем дальнейшие выводы и штопор-формулы и т.д., до бесконечности. Ниже мы на практике продемонстрируем, как продвигается этот процесс, так что любой читатель, освоивший технику натурального вывода, сможет самостоятельно наращивать совокупность построенных выводов и доказанных штопор-формул.

Рассмотрим несколько примеров выводов, в которых используются штопор-правила.

1. B	– посылка;
2. B	– 1, р.
3. $B \vdash B$	– 1-2, $\vdash$в

Смысл этого простейшего рассуждения очевиден. На первом шаге принимается посылка B. На втором из нее по правилу рефлексивности выводится она сама. Последовательность 1-2 (т.е. двухчленная последовательность B, B) является выводом (по определению вывода!) из посылки B формулы B. На третьем шаге к выводу B, B применяется правило $\vdash$в, пробредшее вид варианта

$$\frac{B,\ B}{B \vdash B}$$

(в данной ситуации A_1 есть B, A есть B, а прочие формулы отсутствуют). Используя определение доказанной штопор-формулы, заключаем, что штопор-формула $B \vdash B$ *доказана* в P_N.

Теперь можно построить еще один вывод.

1. $B \vdash B$	– доказанная штопор-формула.
2. $\vdash (B \to B)$	– из 1, $\to$в.

Используя определение теоремы, получаем, что формула $(B \to B)$ является *теоремой* натурального исчисления высказываний P_N.

Разумеется, оба вывода можно объединить в один.

1. B	– посылка;
2. B	– 1, р.

3. B $\vdash$ B — 1-2, $\vdash$в
4. $\vdash$ (B $\rightarrow$ B) — 3, $\rightarrow$в.

Правило $\vdash$в красноречиво говорит о смысле знака «$\vdash$»: если есть вывод из посылок A_1, ..., A_n формулы A, то между посылками A_1, ..., A_n и заключением A можно поставить специальный знак «выводится». Но этот знак и есть $\vdash$. Таким образом, знак выводимости $\vdash$ не может появиться в штопор-формуле без предварительного построения соответствующего вывода. И в целом выражение вида A_1, ..., A_n $\vdash$ A понимается как утверждение «Существует вывод из посылок A_1, ..., A_n формулы A», что и требовалось.

Проиллюстрируем теперь применение правила $\vdash$у. В аксиоматическом исчислении высказываний было показано, что теоремами являются любые формулы вида (A $\rightarrow$ T), если T — теорема. Значит, в частности, $\vdash$ (A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ B)). Передокажем последнюю теорему в натуральном исчислении.

1. A — посылка
2. $\vdash$ (B $\rightarrow$ B) — доказанная штопор-формула
3. (B $\rightarrow$ B) — 2, $\vdash$у
4. A $\vdash$ (B $\rightarrow$ B) — 1-3, $\vdash$в
5. $\vdash$ (A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ B)) — 4, $\rightarrow$в

Сделаем пояснения, двигаясь от конца построенного вывода. Чтобы подготовить применение правила $\rightarrow$в на заключительном шаге, нам требовался вывод штопор-формулы A $\vdash$ (B $\rightarrow$ B). Но как его получить? — Построить вывод из посылки A *формулы* (B $\rightarrow$ B). Для этого мы использовали доказанную *штопор-формулу* $\vdash$ (B $\rightarrow$ B) и правило $\vdash$у. В результате шаги 1-3 образовали требуемый вывод.

Можно было доказать теорему (A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ B)) другим путём.

1. A — доп.
2. B — доп.
3. B — 2, р
4. A, B $\vdash$ B — 1-3, $\vdash$в
5. A $\vdash$ (B $\rightarrow$ B) — 4, $\rightarrow$в
6. $\vdash$ (A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ B)) — 5, $\rightarrow$в

Хотя в этом доказательстве больше шагов, чем в предыдущем, оно ничуть не хуже. В конце концов, главное — построить нужный вывод. Обратите внимание, что в роли Г в применении правила $\rightarrow$в на 4 шаге выступало множество {A}.

В соответствии с определением вывода, заключение должно быть либо ранее доказанной штопор-формулой, либо получено из выше расположенных формул последовательности по одному из правил вывода.

Например, последовательность

1. B — доп.
2. B — р

будет выводом, т.к. заключение B получено на основании пункта 3 определения вывода по правилу р.

В дальнейшем, если доказанная штопор-формула помещается в вывод, в анализе справа будем применять сокращение «док.» (от слова «доказана») Последовательность

1. $B \vdash B$ — док.

также будет выводом, т.к. заключение $B \vdash B$ получено на основании пункта 2 определения вывода. Аналогичным образом, выводом будет и последовательность

1. A — доп.
2. B — доп.
3. $C \vdash C$ — док.

С содержательной позиции это странный вывод, в котором принимаются посылки, никак не используемые в дальнейшем рассуждении. Но, с формальной точки зрения, эта последовательность является корректным выводом. Конечно, посылки A и B здесь просто лишние, но вывода это не портит.

Однако, последовательность формул

1. A — доп.
2. B — доп.

не будет выводом, т.к. заключительная формула B — это всего лишь посылка, а не ранее доказанная штопор-формула или формула, которую действительно вывели из предыдущих выражений рассматриваемой последовательности по одному из правил вывода.

Прведём пример беспосылочного вывода, в котором применены оба штопор-правила.

1. $\vdash (B \rightarrow B)$ — док.
2. $(B \rightarrow B)$ — 1, $\vdash$у
3. $(A \vee (B \rightarrow B))$ — 2, $\vee$в2
4. $\vdash (A \vee (B \rightarrow B))$ — 1-3, $\vdash$в

В рассуждениях часто приходится иметь дело с ситуацией, когда получен вывод $\Gamma \vdash A$ и мы умеем построить вывод $A \vdash B$. В этом случае всегда можно построить вывод $\Gamma \vdash B$. Иначе говоря, отношение выводимости $\vdash$ является транзитивным. Продемонстрируем это в общем виде.

Предположим, даны выводы штопор-формул $A_1, ..., A_n \vdash A$ и $A \vdash B$. Достроим первый вывод до доказательства теоремы $\vdash (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow ,..., \rightarrow (A_n \rightarrow A)...)$ посредством n-кратного применения правила $\to$в, а второй вывод достроим до доказательства теоремы $\vdash (A \to B)$, однократно применив то же самое правило $\to$в. Покажем теперь, как получить требуемый вывод.

1.	A_1	– доп.
....		
n.	A_n	– доп.
n+1.	$\vdash (A_1 \to (A_2 \to ,..., \to (A_n \to A)...)$	– док.
n+2.	$\vdash (A \to B)$	– док.
n+3.	$(A_1 \to (A_2 \to ,..., \to (A_n \to A)...)$	– n+1, $\vdash$у
n+4	$(A \to B)$	– n+2, $\vdash$у
n+5.	$(A_2 \to ,..., \to (A_n \to A)...)$	– 1, n+3 $\to$у
....		
2n+3.	$(A_n \to A)$	– n–1, 2n+2 $\to$у
2n+4.	A	– n, 2n+3 $\to$у
2n+5.	B	– 2n+4, n+4 $\to$у
2n+6.	$A_1, ..., A_n \vdash B$	– 1-(2n+5), $\vdash$в

Не хотелось бы вновь и вновь воспроизводить выше приведённую схему рассуждений в каждом случае, когда в выводе понадобится транзитивный переход. Нельзя ли этот переход разрешить сразу: при наличии доказанных штопор-формул $A_1, ..., A_n \vdash A$ и $A \vdash B$ немедленно заключать о доказанности штопор-формулы $A_1, ..., A_n \vdash B$ (полагая $n \geq 0$, т.е. включая при $n = 0$ переход от $\vdash A$, $A \vdash B$ к $\vdash B$)? В логике нередко для сокращения некоторой стандартной последовательности всегда осуществимых шагов вывода принимают так называемые *производные правила*, которые позволяют эти шаги элиминировать (т.е. устранить). В нашем случае мы примем производное правило *транзитивности* следующего вида.

Правило транзитивности

$$\frac{A_1, ..., A_n \vdash A \qquad A \vdash B}{A_1, ..., A_n \vdash B}$$

Добавим это правило (где $n \geq 0$) к уже имеющимся и при его применении в выводах условимся справа писать, наряду с указанием номеров штопор-формул $A_1, ..., A_n \vdash A$ и $A \vdash B$, сокращение «тр.». Повторим, в это правило производное от остальных, без него вполне можно обойтись. Но мы принимаем его для удобства.

Ещё одно замечание общего характера. Необходимо показать, что *посылки можно выписывать в любом порядке*. Например, существование вывода $A_1, \ldots, A_n \vdash A$ влечет существование вывода $A_n, \ldots, A_1 \vdash A$, в котором использован обратный (по отношению к исходному) порядок посылок.

Докажем утверждение о не существенности порядка посылок. Пусть доказана штопор-формула $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n \vdash A$. Возьмём *последовательность* $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in-1}, A_{in}$, которая *состоит из тех же самых формул, что и последовательность* $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$, *но выписаны эти формулы в другом порядке*. Надо получить штопор-формулу $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in-1}, A_{in} \vdash A$. Применяя n раз правило $\to$в к доказанной штопор-формуле $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n \vdash A$, докажем теорему вида $\vdash (A_1 \to (A_2 \to \ldots \to (A_{n-1} \to (A_n \to A))\ldots))$. Затем построим следующий вывод.

1. A_{i1} — доп.
2. A_{i2} — доп.

....

n-1. A_{in-1} — доп.

n. A_{in} — доп.

n+1. $\vdash (A_1 \to (A_2 \to \ldots \to (A_{n-1} \to (A_n \to A))\ldots))$ — док.

n+2. $(A_1 \to (A_2 \to \ldots \to (A_{n-1} \to (A_n \to A))\ldots))$ — n+1, $\vdash$у

Поскольку последовательности $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in-1}, A_{in}$ и $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ состоят из одних и тех же формул, среди $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in-1}, A_{in}$ найдётся формула A_{ij}, которая совпадёт с формулой A_1. Формула A_{ij} стоит на j-ом месте и является антецедентом формулы, стоящей на n+2-ом месте. В такой ситуации применимо правило $\to$у.

n+3. $(A_2 \to \ldots \to (A_{n-1} \to (A_n \to A))\ldots)$ — j, n+2, $\to$у

Найдём среди посылок формулу A_{ik}, которая совпадает с A_2 и снова применим правило $\to$у, отделив A_2 от формулы номер n+3. Потом отделим A_3, A_4 и т.д. Приближаясь к концу вывода, на шаге 2n получим формулу

2n.

$(A_{n-1} \to (A_n \to A))$.

Снова обнаружим среди посылок формулу A_{im}, совпадающую с A_{n-1} и стоящую на месте номер m. Получим следующую формулу.

2n+1. $(A_n \to A)$ — m, 2n, $\to$у

Наконец, на некотором месте номер g найдём посылку A_{ig}, совпадающую с A_n. Это позволит получить формулу A.

2n+2. A — g, 2n+1

Перед нами последовательность шагов 1-(2n+2), являющаяся выводом формулы A из посылок $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{in-1}, A_{in}$. На заключительном шаге применим к этому выводу правило $\vdash$в.

2n+3. $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{in-1}, A_{in} \vdash A$ — 1-(2n+2), $\vdash$в

В итоге штопор-формула $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{in-1}, A_{in} \vdash A$ доказана, что и требовалось.

На основании только что доказанного, примем ещё одно производное правило *перестановки посылок* (сокращённо «пп.»).

Перестановка посылок

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n \vdash A}{A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in-1}, A_{in} \vdash A}$$

Продолжим построение доказательств и выводов в системе P_N. В отличие от аксиоматических систем, где идею построения доказательства удаётся сформулировать лишь в редких случаях, в натуральных системах эта идея часто лежит на поверхности.

$(A \vee B) \vdash (B \vee A)$.

1. A — доп.
2. B — доп.
3. $(B \vee A)$ — 1, $\vee$в2
4. $A \vdash (B \vee A)$ — 1, 3, $\vdash$в
5. $(B \vee A)$ — 2, $\vee$в1
6. $B \vdash (B \vee A)$ — 2, 5, $\vdash$в
7. $(A \vee B) \vdash (B \vee A)$ — 4, 6, $\vee$у

В заключении построенного вывода стоит штопор-формула $(A \vee B) \vdash (B \vee A)$, которую и требовалось доказать. Здесь нужно было выводить из дизъюнкции. Но что значит вывести из $(A \vee B)$ заключение C? — Это значит, что сначала надо вывести C из A, и потом вывести C из B. Тогда, действительно, всё равно, A имеет место или B, — в любом из альтернативных случаев C выводится. Данная схема рассуждений так и была названа: рассуждения по случаям. В P_N ей соответствует правило $\vee$у. Обратите внимание, что в этом правиле дизъюнкция появляется под чертой, как бы в заключении правила. Почему же тогда оно называется правилом удаления, а не введения? Дело в том, что это косвенное правило, осуществляющее переход от одних выводимостей к другим. В результирующей выводимости $\Gamma, (A \vee B) \vdash C$ (стоящей под чертой) дизъюнкция $(A \vee B)$ оказывается на месте посылки, а не на месте заключения C. В этом смысле она удалена из заключения. Сравните: в правилах введения логических связок соответствующая связка появляется именно в заключении либо правила (если правило прямое), либо в заключении результирующей штопор-формулы (как в правилах $\to$в и $\neg$в).

$(A \to B), \neg B \vdash \neg A$

1.	$(A \to B)$	– доп.
2.	$\neg B$	– доп.
3.	A	– доп.
4.	$\neg B$	– 2, р
5.	$(A \to B), \neg B, A \vdash \neg B$	– 1-4, $\vdash$в
6.	B	– 3, 1, $\to$у
7.	$(A \to B), \neg B, A \vdash B$	– 1-3, 6 $\vdash$в
8.	$(A \to B), \neg B \vdash \neg A$	– 7, 5 $\neg$в

Штопор-формула $(A \to B), \neg B \vdash \neg A$ доказана: имея импликацию и отрицание её консеквента, можно смело отрицать и антецедент. Допустим, принимаются посылки «Если ты меня уважаешь, значит, ты меня боишься» и «Но ты меня не боишься». Следовательно, «Ты меня не уважаешь». Истинность импликации здесь весьма сомнительна. Но никто и не утверждает, что данные посылки и заключение истинны. Тем не менее, рассуждение правильное, и при истинности посылок оно обеспечит истинность заключения.

Что касается самого вывода данной штопор-формулы, то в его основе лежит правило введения отрицания. Идея тут такова. Требуется вывести отрицание $\neg A$. Как это сделать, напрямую не видно. Однако всегда есть возможность попытаться рассуждать косвенно. Давайте к имеющимся посылкам добавим A. Если после этого из посылок удастся вывести некоторое B и его отрицание $\neg B$, заключим, что A ведёт к противоречию и, следовательно, верно $\neg A$. Так мы и поступили.

Быть может, мы зря испугались противоречия? – Нет, не зря. В системе P_N допущение противоречия ведёт к таким же катастрофическим последствиям, как и в рассмотренных аксиоматических системах. Покажем, что так.

$A, \neg A \vdash B$

1.	A	– доп.
2.	$\neg A$	– доп.
3.	$\neg B$	– доп.
4.	A	– 1, р
5.	$A, \neg A, \neg B \vdash A$	– 1-4, $\vdash$в
6.	$\neg A$	– 2, р

7. $A, \neg A, \neg B \vdash \neg A$ — 1-3, 6, $\vdash$в
8. $A, \neg A \vdash \neg\neg B$ — 5, 7, $\neg$в
9. $\neg\neg B$ — доп.
10. B — 9, $\neg$у
11. $\neg\neg B \vdash B$ — 9-10, $\vdash$в
12. $A, \neg A \vdash B$ — 8, 11, тр.

До восьмого шага включительно всё шло обычным порядком. Однако на этом шаге получили штопор-формулу $A, \neg A \vdash \neg\neg B$, вместо требуемой $A, \neg A \vdash B$. Но из $\neg\neg B$ непосредственно выводится B по $\neg$у, поэтому на одиннадцатом шаге получаем штопор-формулу $\neg\neg B \vdash B$. Применяя производное правило транзитивности к штопор-формулам 8 и 11, доказываем искомую штопор-формулу $A, \neg A \vdash B$.

Людям, не знакомым с логикой, утверждение о том, что из противоречивых посылок выводится любое высказывание, кажется странным. Рассказывают, что однажды к Б.Расселу подошёл не искушённый в логике философ и недоверчиво спросил: «Вы действительно верите, что из противоречия можно вывести всё, что угодно?» — «Да, я в это верю», — ответил Рассел. — «Так что же, Вы верите, что из $2 \times 2 = 5$ выводится, что Вы — папа римский?» — «Да, верю». — «И можете это доказать?» — «Да, могу. Пусть $2 \times 2 = 5$. Так как также верно $2 \times 2 = 4$, имеем $5 = 2 \times 2 = 4$. Значит, $5 = 4$. Вычтем из обеих частей этого равенства по 3. Получим $2 = 1$. Папа римский и я — нас двое. Но $2 = 1$. Следовательно, папа римский и я — одно лицо, и я — папа римский». Нелепый вывод получился из-за того, что допущение $2 \times 2 = 5$ противоречит теоремам арифметики, что позволят вывести не только равенство $2 = 1$, но и вообще любую арифметическую формулу.

Используем доказанную штопор-формулу $A, \neg A \vdash B$ для доказательства следующего выражения.

$A \vdash \neg\neg A$

1. $A, \neg A \vdash B$ — док.
2. $A, \neg A \vdash \neg B$ — док.
3. $A \vdash \neg\neg A$ — 1,2, $\neg$в.

Здесь на втором шаге использовали то обстоятельство, что в $A, \neg A \vdash B$ формула B — любая, в том числе она может принять вид $\neg B$.

$(A \vee B), \neg B \vdash A$

1. $\neg B$ — доп.

2. A — доп.
3. A — 2, р.
4. $\neg B, A \vdash A$ — 1-3, $\vdash$в
5. $B, \neg B \vdash A$ — док.
6. $\neg B, B \vdash A$ — 5, пп.
7. $\neg B, (A \vee B) \vdash A$ — 4, 6, $\vee$у
8. $(A \vee B), \neg B \vdash A$ — 7, пп.

Идея данного вывода проста. Надо вывести A из дизъюнкции $(A \vee B)$, используя ещё посылку $\neg B$. Значит, надо использовать правило удаления дизъюнкции. Подготавливая его применение, требуется построить два вспомогательных вывода $\Gamma, A \vdash C$ и $\Gamma, B \vdash C$. Ясно, что вместо C необходимо взять A, причём роль Г играет посылка $\neg B$. Поэтому $\neg B$ ставим на первое место в выводе. Получить вывод $\neg B, A \vdash A$ не составляет труда. Второй вывод $\neg B, B \vdash A$ получаем по производному правилу перестановки посылок пп. По правилу $\vee$у имеем $\neg B, (A \vee B) \vdash A$. Это не совсем то, что нужно, однако ещё одно применение правила пп. ставит посылки на место.

Уже было показано, что каждый вывод вида $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n \vdash A$ n-кратным применением правила $\rightarrow$в превращается в доказательство теоремы $\vdash (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow A))\ldots))$. Поэтому все полученные выводы можно достроить до доказательств. Так, прямой вывод $\neg\neg A \vdash A$ за один шаг превращается в доказательство.

1. $\neg\neg A \vdash A$ — док.
2. $\vdash (\neg\neg A \rightarrow A)$ — 1, $\rightarrow$в

Преобразование вывода $(A \rightarrow B), \neg B \vdash \neg A$ в доказательство потребует двух шагов.

1. $(A \rightarrow B), \neg B \vdash \neg A$ — док.
2. $(A \rightarrow B) \vdash (\neg B \rightarrow \neg A)$ — 1, $\rightarrow$в
3. $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$ — 2, $\rightarrow$в

Теперь все варианты этой теоремы, где вместо A и B стоят любые формулы, также доказаны. Например, доказаны варианты $\vdash (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)))$ и $\vdash ((\neg(A \,\&\, \neg B) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg\neg(A \,\&\, \neg B)))$, которые скоро нам понадобятся.

Докажем, что $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \,\&\, \neg B)$. Но в P_N нет эквивалентности, поэтому данная задача распадается на две: $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \,\&\, \neg B))$ и $\vdash (\neg(A \,\&\, \neg B) \rightarrow (A \rightarrow B))$.

$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \,\&\, \neg B))$

1. $(A \to B)$ — доп.
2. $(A \& \neg B)$ — доп.
3. A — 2, &у1
4. B — 3, 1 $\to$у
5. $(A \to B), (A \& \neg B) \vdash B$ — 1-4, $\vdash$в
6. $\neg B$ — 2, &у2
7. $(A \to B), (A \& \neg B) \vdash \neg B$ — 1, 2, 6, $\vdash$в
8. $(A \to B) \vdash \neg(A \& \neg B)$ — 5, 7, $\neg$в
9. $\vdash ((A \to B) \to \neg(A \& \neg B))$ — 8, $\to$в

$\vdash (\neg(A \& \neg B) \to (A \to B))$

1. $\neg(A \& \neg B)$ — доп.
2. A — доп.
3. $\neg B$ — доп.
4. $(A \& \neg B)$ — 2, 3, &в
5. $\neg(A \& \neg B), A, \neg B \vdash (A \& \neg B)$ — 1-4, $\vdash$в
6. $\neg(A \& \neg B)$ — 1, р.
7. $\neg(A \& \neg B), A, \neg B \vdash \neg(A \& \neg B)$ — 1-3, 6, $\vdash$в
8. $\neg(A \& \neg B), A \vdash \neg\neg B$ — 5, 7, $\neg$в
9. $\neg\neg B \vdash B$ — док.
10. $\neg(A \& \neg B), A \vdash B$ — 8, 9, тр.
11. $\neg(A \& \neg B) \vdash (A \to B)$ — 10, $\to$в
12. $\vdash (\neg(A \& \neg B) \to (A \to B))$ — 11, $\to$в

В заключение докажем в P_N закон Пирса. Попробуйте получить доказательство этого закона в аксиоматической системе (особенно в P_0), и тогда вы оцените преимущества натурального вывода.

$\vdash (((A \to B) \to A) \to A)$

1. $((A \to B) \to A)$ — доп.
2. $\neg A$ — доп.
3. $\vdash (((A \to B) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \to B)))$ — док.
4. $(((A \to B) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \to B)))$ — 3, $\vdash$у
5. $(\neg A \to \neg(A \to B))$ — 1, 4, $\to$у
6. $\neg(A \to B)$ — 2, 5, $\to$у
7. $\vdash (\neg(A \& \neg B) \to (A \to B))$ — док.
8. $(\neg(A \& \neg B) \to (A \to B))$ — 7, $\vdash$у
9. $\vdash ((\neg(A \& \neg B) \to (A \to B)) \to (\neg(A \to B) \to$
$\to \neg\neg\neg(A \& \neg B)))$ — док.
10. $((\neg(A \& \neg B) \to (A \to B)) \to (\neg(A \to B) \to$
$\to \neg\neg\neg(A \& \neg B)))$ — 9, $\vdash$у
11. $(\neg(A \to B) \to \neg\neg\neg(A \& \neg B))$ — 8, 10, $\to$у

12. $\neg\neg(A \,\&\, \neg B)$ — 6, 11, $\rightarrow$у
13. $(A \,\&\, \neg B)$ — 12, $\neg$у
14. A — 13, &у1
15. $((A \rightarrow B) \rightarrow A), \neg A \vdash A$ — 1-14, $\vdash$в
16. $\neg A$ — 2, р.
17. $((A \rightarrow B) \rightarrow A), \neg A \vdash \neg A$ — 1-2, 16, $\vdash$в
18. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \vdash \neg\neg A$ — 15, 17, $\neg$в
19. $\neg\neg A \vdash A$ — док.
20. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \vdash A$ — 18, 19, тр.
21. $\vdash (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$ — 20, $\rightarrow$в

Завершим параграф кратким обсуждением семантических свойств системы P_N, без построения соответствующих метадоказательств. Все прямые правила P_N воспроизводят отношение логического следования: если вместо черты, разделяющей посылки этих правил и их заключение, поставить знак $\models$, то получится корректное утверждение о логическом следовании. Например, правилу введения конъюнкции соответствует $A, B \models (A \,\&\, B)$. И т.д.

Что касается непрямых, косвенных правил, то в них замена штопора $\vdash$ на двойной штопор $\models$ приведёт к такому результату: если на входе правила утверждения о логическом следовании верны, то на его выходе также получим верное утверждение о логическом следовании. Если, например, $\Gamma, A \models B$ и $\Gamma, A \models \neg B$, то будем иметь $\Gamma \models \neg A$, так что правило введения отрицания сохраняет следование. Этим же свойством обладают все оставшиеся косвенные правила, только правила введения и удаления $\vdash$ своеобразны – ведь в них знак выводимости $\vdash$ встречается либо только на выходе, либо только на входе.

Правило $\vdash$в применяется к корректным выводам, в которых каждый шаг воспроизводил логическое следование или был переходом от следования одного вида к следованию другого вида. Это означает, что если в выводе $A_1, ..., A_n, \psi_{n+1}, ..., \psi_m, A$ формулы A все посылки $A_1, ..., A_n$ истинны, то выражения ψ_{n+1}, ψ_{n+2} и т.д., вплоть до A, также истинны (т.е. истинны как встречающиеся в выводе формулы, так и встречающиеся в нём утверждения о наличии следования). Поэтому имеем право заключить: $A_1, ..., A_n \models A$.

Совсем несложен смысл правила $\vdash$у. Если имеется вывод теоремы $\vdash A$, то верно утверждение о том, что A следует из пустого множества посылок, т.е. верно утверждение $\models A$. Значит, A истинна в любой ситуации, и потому помещение формулы A в вывод не испортит переходов от истин к истинам. Таким образом, для P_N верна теорема о семантической корректности.

Метатеорема о семантической корректности системы P_N. *Если* $\vdash A$, *то* $\models A$.

Отсюда следует теорема о непротиворечивости.

Метатеорема о непротиворечивости системы P_N. *Не существует такой формулы А, что и* $\vdash A$, *и* $\vdash \neg A$ *в* P_N.

Верна также теорема о полноте P_N.

Метатеорема о семантической полноте системы P_N. *Если* $\models A$, *то* $\vdash A$.

Объединяя метатеоремы корректности и полноты, получаем

$$\models \mathbf{A} \Leftrightarrow \vdash \mathbf{A}.$$

И снова (как и в аксиоматике) последнее утверждение можно усилить. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – формулы. Тогда в P_N

$$\mathbf{A_1, A_2, ..., A_n} \models \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A_1, A_2, ..., A_n} \vdash \mathbf{A}.$$

Значит, если из посылок $A_1, A_2, ..., A_n$ логически следует А, то существует вывод в P_N из посылок $A_1, A_2, ..., A_n$ формулы А. И наоборот, если построен вывод в P_N из посылок $A_1, A_2, ..., A_n$ формулы А, то из $A_1, A_2, ..., A_n$ логически следует А. Обозначим произвольное (возможно, пустое) множество посылок греческой буквой Г. Тогда для P_N оба утверждения можно объединить в одно:

$$\Gamma \models \mathbf{A} \Leftrightarrow \Gamma \vdash \mathbf{A}.$$

Подчеркнём, что ни одну из метатеорем мы для P_N не доказывали из-за технической громоздкости доказательств, в то время как для аксиоматической системы P_0 метатеоремы о семантической корректности и непротиворечивости были доказаны достаточно просто и коротко. Это лишний раз свидетельствует о том, что аксиоматические системы удобнее в отношении лёгкости изучения их метасвойств, чем системы натурального вывода. Зато строить выводы и доказательства в натуральных системах намного проще, чем в аксиоматических.

ГЛАВА 5. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

В этой главе будет проанализировано внутреннее строение высказываний с учётом и таких их частей, которые сами высказываниями не являются. В современной логике среди элементов внутренней структуры высказываний, наряду с уже знакомыми вам логическими связками, выделяют имена, понятия и кванторы. Располагая связками, именами, понятиями и кванторами, можно осуществлять намного более тонкий анализ рассуждений, чем это было возможно в логике высказываний. Неизбежной ценой за продвижение вперёд в деле постижения законов правильных рассуждений будет существенное усложнение синтаксиса логического языка и его семантики. Данный раздел логики можно было бы назвать логикой понятий. Однако не много найдётся логических терминов, которые бы использовались в столь многочисленных смыслах, как слово «понятие». Разве что само слово «логика» может здесь быть соперником. Видимо, поэтому в современной логике предпочитают вместо термина «понятие» использовать более нейтральный термин «предикат». Мы тоже согласны называть понятия предикатами, но не видим резона отказываться от привычного слова «понятие», и потому будем также предикаты называть понятиями.

§1. Имена и понятия

В составе высказываний встречаются имена. **Имя** – *это знак, денотатом которого является индивид.* Что такое индивид – сложный философский вопрос[7] . Мы не будем пытаться точно на него ответить. Вместо этого обратимся к практике использования так называемых *собственных имён*, которые пишутся с заглавной буквы. Так вот, всё, чему можно дать собственное имя, является индивидом. «Сократ», «Аристотель», «Москва», «Берлин», «Нижний Новгород» «Венера», «Марс», «Полярная звезда», «Созвездие Андромеды», «Зевс», «Геракл», «Россия», «Китай», «Европа», «Азия», «Государственный университет гуманитарных наук», «Московский государственный университет им. М.В Ломоносова», «4», «IV» – всё это собственные имена самых разнообразных и разнородных индивидов. И этот перечень можно продолжать до бесконечности.

Не всем объектам дают собственные имена. Например, элементарные частицы не удостоились этой чести. Никто не назовёт какой-либо электрон, фотон или протон по имени. Это потому, что, с точки зрения современных представлений, такие объекты лишены индивидуальности. У науки нет способа отличить один электрон от другого по каким-то индивидуальным признакам. Тем не менее, электроны и другие элементарные частицы также считаются индивидами.

Чтобы не запутаться в этой ситуации, *условимся относить к индивидам любые объекты, о которых мы рассуждаем.* Короче, можно сказать так: **индивид** — *это объект рассуждения.*

Мы рассуждаем об индивидах при помощи понятий. **Понятие** — *это знак, денотатом которого является совокупность индивидов.* Денотаты понятий будем ещё называть *объёмами понятий.* Термин «объём понятия» принят в традиционной логике и нередко используется в практике рассуждений.

Несмотря на внешнюю простоту, определение понятия в действительности требует разъяснений. Прежде всего приведём примеры понятий. Слова «человек», «число», «зелёный», «храбрый» и многие, многие другие указывают не на отдельные индивиды — на отдельного человека, отдельное число, отдельный зелёный предмет или отдельного храбреца, а на совокупность всех людей, множество всех чисел, совокупность всех объектов зелёного цвета и совокупность всех храбрых индивидов. Возьмём индивида по имени «Сократ». Каждый согласится, что Сократ человек, многие будут настаивать, что он храбрый, но никто в здравом уме не будет считать его числом или объектом зелёного цвета. Это означает, что Сократ принадлежит совокупности людей и, скорее всего, более узкой совокупности храбрых людей, но не принадлежит ни множеству чисел, ни совокупности зелёных предметов.

Каждая из упомянутых совокупностей содержит много индивидов, а совокупность чисел — даже бесконечно много. Ну, а что, если в совокупности мало индивидов? И может ли совокупность содержать только один индивид? Или вообще ни одного?

Ответы на поставленные вопросы диктуются практикой познавательной деятельности людей. Человеческое познание в обязательном порядке предполагает использование каких-либо имеющихся понятий или формирование новых понятий. Образование новых понятий свойственно не только науке. Даже если речь идёт об обыденном познании, мы не только используем готовые понятия, но и вводим новые.

Например, следователь распутывает преступление. Он задаётся вопросом, кто совершил данное преступление. Но выражение «совершившие данное преступление» указывает на некую совокупность людей, действительно виновных в совершении расследуемого деяния. В соответствии с определением, перед нами понятие. Конечно, здесь не абстрактное и глубокое понятие теоретической науки, а понятие обыденного ряда, но это не меняет сути дела. Следователь заранее не знает, сколько людей виновны. Их может быть несколько, а, может быть, виновен только один человек. В любом случае сформированное понятие работает.

В физике введено понятие «чёрная дыра». Чёрными дырами называют объекты, сила гравитации которых настолько велика, что даже свет не может их покинуть. Возьмём понятие «реальная чёрная дыра». Сколько тел в нашей Метагалактике являются реальными чёрными дырами? Возможно, – много, возможно, – мало, возможно, – только одно. Наконец, возможно, что в действительности вообще нет ни одной чёрной дыры. В настоящее время предпринимаются познавательные усилия для получения ответа на поставленный вопрос. Однако без понятия «реальная чёрная дыра» мы бы не смогли этот вопрос даже сформулировать.

Физики располагают теоретическим понятием чёрной дыры, но в данном случае этого совершенно недостаточно. Они хотят не только разобраться в теории, но и понять реальную ситуацию с такими гипотетическими объектами, как чёрные дыры. Для этого им необходимо понятие, соотносящее теорию и реальность. Так бывает не всегда. В иных случаях мы довольствуемся лишь теорией. Скажем, в отношении теоретического понятия «число» мы не ставим вопроса, есть ли тела во Вселенной, являющиеся числами. Однако в рассматриваемом примере с реальными чёрными дырами заранее нельзя сказать, какая из перечисленных возможностей имеет место. Получается, что понятие «реальная чёрная дыра» сформировано и успешно функционирует в познании ещё до того, как был точно описан его денотат.

Требовать, чтобы вводимые понятия заранее обретали не пустые и не единичные денотаты, нереалистично. Конечно, хорошо было бы жить в мире, где пустые понятия автоматически отбрасываются, а индивиду из единичной совокупности сразу даётся имя. Но фактическое положение дел таково, что приходится считаться с тем, что вводимые понятия могут оказаться пустыми или единичными. Заранее исключить такие возможности нельзя, аналогично тому, как в реальности нельзя исключить ложные высказывания из всех рассуждений.

Итак, денотат понятия может содержать много или мало индивидов, может содержать только один индивид или не содержать ни одного, т.е. быть пустым.

В литературе по современной логике понятия иногда называют общими именами. Нам такая терминология не представляется удачной. Понятие – это знак, указывающий на совокупность индивидов, в то время как имя обозначает отдельный индивид. В высказываниях и рассуждениях имена и понятия занимают разное место и играют разную роль. Строить высказывания и рассуждения можно без использования имён. Однако в естественном языке невозможно сформулировать высказывание, которое бы не содержало ни одного понятия. В этом смысле понятия важнее имён, но и именами также не следует пренебрегать. В отличие от понятий, которые могут оказаться пустыми, пустых имён не бывает. Ведь имя – это знак индивида. А если индивида нет, то нет и имени как знака. Использование имён придаёт нашим утверждениям и рассуждениям большую конкретность и определённость, позволяет точнее описывать реальность. Представьте, что следователь не установил имён преступников. В этом случае преступление останется безнаказанным. Или, допустим, физики найдут реальную чёрную дыру. Описание её точного местоположения будет именем данного объекта, и любой заинтересованный учёный сможет, сориентировав приборы в соответствующем направлении, заняться изучением этого феномена.

На таких разновидностях знаков, как имена и понятия, легче проиллюстрировать *общие принципы использования знаков*. Выделяют три принципа.

I. ***Принцип однозначности***. Согласно этому принципу, *каждый знак должен иметь ровно один денотат*. Обратная ситуация не запрещается. У одного денотата может быть сколь угодно знаков.

На практике принцип однозначности постоянно нарушается. Разные люди имеют одинаковые имена (с точки зрения логики, фамилия, имя и отчество – это составные части единого имени), разные животные одинаковые клички, совокупности разных типов нередко обозначаются одним и тем же словом. Например, понятие «зелёный» обозначает не только совокупность зелёных предметов, но и совокупность озабоченных экологическими проблемами людей. Имя «Москва» указывает не только на столицу России, но и на другие города с тем же именем. Связка «или» в естественном языке может иметь исключающее или не исключающее значение. И т.п.

Иногда нарушение принципа однозначности используется как литературный приём. В пьесе Э.Ионеско «Лысая певица» у умершего Бобби Уотсона осталась вдова, которую зовут Бобби Уотсон. Каждого из их детей также зовут Бобби Уотсон. Имя человека, за которого вдова собирается выйти замуж, — Бобби Уотсон. В ряде пьес того же Э.Ионеско главных героев зовут Беранже. И т.п.

Чем выше требования к результатам познавательной деятельности, тем жёстче должен соблюдаться принцип однозначности. Так, задача борьбы с преступностью заставила искать способы именования, позволяющие каждому человеческому индивиду давать уникальное имя. Дактилоскопия — один из таких способов. Ведь отпечатки пальцев — не что иное, как имя оставившего их индивида. Правда, это имя-индекс, а не имя-символ. Но всё равно имя.

Науке приходилось решать и более сложные задачи однозначного присваивания имён. Как быть, если необходимо дать имена объектам из бесконечной совокупности индивидов, например, числам? Именами чисел являются *цифры*. Сколько нужно цифр, чтобы дать однозначное имя каждому положительному целому числу? В принципе, достаточно одной цифры — палочки I. Число один получает имя I, число два — II, три — III, четыре — IIII и т.д. Хотя принцип однозначности соблюдается, практически это очень не удобно. В Древнем Риме пытались сокращать длину имён чисел, вводя специальные имена для них: I (один), V (пять), X (десять), L (пятьдесят), C (сто), D (пятьсот) и M (тысяча). При этом, если слева от специальной цифры появлялось обозначение предыдущего разряда, то надо было из большего числа вычесть меньшее. В противном случае числа надо было складывать. Например, четыре записывалось как IV (5 − 1), три как III (1 + 1 +1), сорок как XL (50 − 10), сорок шесть как XLVI ((50 − 10) + (5 + 1)) и т.п. Такие неуклюжие цифры осложняли вычисления. В десятичной позиционной системе записи цифр (когда одна и та же цифра обозначает разные разряды чисел в однозначной зависимости от своего места среди других цифр) любой студент сумеет умножить 1444 на 3888, но в Древнем Риме умножить MCDXLIV на MMMDCCCLXXXVIII было непростой задачей даже для преподавателей.

II. ***Принцип предметности***. В соответствии с этим принципом, *используя знак, мы должны иметь в виду не сам знак, а его денотат.*

Рассмотрим предложения «В Москве шесть миллионов жителей» и «В Москве шесть букв». Первое предложение (независимо от того, истинно оно или ложно) сформулировано корректно, тогда как второе режет слух. Это происходит из-за нарушения во втором случае принципа предметности. Вместо денотата, – города, – речь шла о самом знаке. А что, если требуется что-либо высказать о самом знаке? Тогда надо было сказать «В слове «Москве» шесть букв» или записать «В «Москве» шесть букв». Кавычки помогают избежать нарушения принципа предметности. Если знак заключить в кавычки, то получится имя, денотатом которого является сам знак. Такие имена называют *кавычковыми* именами. Денотатом кавычкового имени «Москве» является сам знак *Москве*. Поэтому выражение «Слово «Москве» заканчивается на букву «е»» будет правильным высказыванием (и при том истинным), а выражение «Город «Москве» заканчивается за «Окружной кольцевой дорогой»» просто не будет осмысленным высказыванием.

Аналогичным образом кавычки действуют на все записываемые знаки, превращая их в денотаты соответствующих кавычковых имён. Выражение «Импликация является стрелкой →» нарушает принцип предметности. Следует выразиться иначе: «Знаком импликации является стрелка «→»». Неправильное «Семён не знает, как пишется верблюд» должны исправить на корректное «Семён не знает, как пишется слово «верблюд»». И т.п. Используя возможности современных текстовых редакторов, иногда вместо кавычек используют какое-либо выделение слова, когда хотят говорить о нём самом, а не о его денотате: «Семён не знает, как пишется слово *верблюд*». В предыдущем тексте мы уже не раз прибегали к этому приёму.

Иногда нет возможности ни использовать кавычки, ни прибегнуть к выделению знака. Так бывает при употреблении иконических знаков. Например, конструкция

«Я вижу лягушку  »

вводит в заблуждение, потому что в действительности видят не лягушку, а иконический знак лягушки. Но этот знак как-то нелепо заключать в кавычки. И его не выделишь курсивом или иным оформлением шрифта. Положение не безнадёжно, поскольку остаётся вариант прямого указания на то, что перед нами изображение существа, а не само существо. Правильнее сказать: «Я вижу изображение лягушки».

III. ***Принцип взаимозаменимости***. В соответствии с этим принципом, *в каждом выражении любой знак-символ можно заменить на какой угодно знак-символ, имеющий тот же самый денотат*.

В шестом параграфе предыдущей главы мы кратко обсуждали принципы замены равного равным и замены эквивалентных. Не повторяя сказанного, отметим, что это частные случаи принципа взаимозаменимости. В самом деле, если $a = b$, то это означает, что у a и b один и тот же денотат. Поэтому, в соответствии с принципом взаимозаменимости, в утверждении $a = c$ вместо a можно взять b, получив $b = c$. Денотатом формулы (A → B) в табличной семантике будет хорошо вам известный результирующий столбец. Но точно такой же результирующий столбец в качестве денотата имеют эквивалентные формулы ¬(A & ¬B) и (¬A ∨ B). Поэтому, по принципу взаимозаменимости, каждую из этих трёх формул можно заменить на любую другую.

Удивительным образом, принцип взаимозаменимости срабатывает не всегда. Мы уже видели, что принципы обозначения могут нарушаться. Но сами принципы оставались правильными. Здесь иная ситуация, когда соблюдение принципа ведёт к возникновению неприемлемых результатов.

Однажды король Георг VI пожелал узнать, является ли писатель Вальтер Скотт автором романа «Вэверлей». В.Скотт в действительности являлся автором этого романа, хотя предпочитал данный факт скрыть. Собственное имя «Вальтер Скотт» и описательное имя «автор романа «Вэверлей»» в качестве денотата имеют одного и того же индивида. Значит, Вальтер Скотт = автор романа «Вэверлей». Но замена в вопросе короля имени «автор романа «Вэверлей»» на имя «Вальтер Скотт» приводит к вопросу о том, является ли Вальтер Скотт Вальтером Скоттом. Ясное дело, что король вовсе не хотел узнать, является ли Скотт Скоттом. Смысл его вопроса недопустимым образом изменился в результате замены равного равным!

Проблема тут не в категории вопросов. Аналогичные трудности возникают и с высказываниями. Археолог Шлиман, в отличие от современного ему учёного сообщества, поверил, что Гомер писал о реальных событиях, и стал искать Трою. Значит, высказывание «Шлиман искал Трою» истинно. Он её в конце концов нашёл на территории Турции в месте под названием

«Гиссарлык». Поскольку имена «Троя» и «Гиссарлык» обозначают одно и то же место, у них один и тот же денотат и Троя = Гиссралык. Заменим имя «Троя» на «Гиссарлык». Получим высказывание «Шлиман искал Гиссарлык». Но это высказывание ложно, Шлиман даже не собирался искать Гиссарлык. Стало быть, заменяя равное равным, из истинного высказывания получили ложное, что логикой запрещено.

Некоторые явления считаются необходимыми, а некоторые – случайными. При формулировании высказываний о таких явлениях используются так называемые *алетические модальности*: слова «необходимо», «возможно», «случайно» По-видимому, нет причин сомневаться, что 9 с необходимостью больше 7. Тогда модальное высказывание «Необходимо, что 9 > 7» истинно. Число планет в Солнечной системе оказалось равным 9, т.е. число планет = 9. Однако подстановка «число планет» вместо «9» даёт ложное модальное высказывание «Необходимо, что число планет > 7». Ведь согласно современным теориям, число планет в Солнечной системе обусловлено случайными причинами, а вовсе не является необходимым следствием законов природы.

До сих пор приводились примеры, когда замена равного равным приводила к неприемлемым результатам. Нетрудно показать, что замена эквивалентного эквивалентным также может вести к недопустимому изменению смысла. Возьмём корректный вопрос: «Верно ли, что формулы $\neg(A \,\&\, \neg B)$ и $(\neg A \vee B)$ имеют одинаковые результирующие столбцы?». Поскольку $(\neg(A \,\&\, \neg B) \leftrightarrow (\neg A \vee B))$, заменим в вопросе первую формулу на вторую. Получим вопрос «Верно ли, что формулы $(\neg A \vee B)$ и $(\neg A \vee B)$ имеют одинаковые результирующие столбцы?». Совершенно очевидно, что одинаковые формулы имеют одинаковые характеристики, так что спрашивать об этом нелепо и, стало быть, вопрос превратился в некорректный

Приходится сделать вывод, что принцип взаимозаменимости способен приводить к неприемлемым результатам и потому должен быть отброшен. Однако есть обширные области рассуждений или контексты, в которых данный принцип работает без проблем. Например, в математических высказываниях (по крайней мере, в классической математике) всегда можно равное заменить на равное, а эквивалентное на эквивалентное. В самой логике, если B является подформулой A и вы замените B на B′ такое, что $(B \leftrightarrow B')$, то в результате получится формула A′ такая, что будет иметь место эквивалентность $(A \leftrightarrow A')$. Было бы не разумно отказываться от применения упрощающего рассуждения принципа взаимозаменимости в этих и других аналогичных случаях, когда можно гарантировать, что никаких недопустимых ситуаций не возникнет. Вместо этого в логике различают два рода контекстов. Контекст называется *экстенсиональным*, если в нём принцип взаимозаменимости проходит без ограничений. Контекст называется *интенсиональным*, если на принцип взаимозаменимости накладываются обусловленные контекстом ограничения.

Математика и построенная здесь логика высказываний являются примерами экстенсиональных контекстов. Контексты, включающие вопросы, будут, как мы видели, интенсиональными. Модальные контексты также оказываются интенсиональными. Помимо упомянутых выше алетических модальностей, есть ещё другие разновидности модальностей, например, *эпистемические* модальности, содержащие слова «верю», «знаю», «убеждён» и им подобные. Рассмотрим высказывание «NN знает, что $(A \to A)$ — закон логики». Законы эквивалентны между собой. В частности, $(A \to A) \leftrightarrow \neg(A \ \& \ \neg A)$. Однако из истинности исходного высказывания не вытекает истинность полученного по замене эквивалентных высказывания «NN знает, что $\neg(A \ \& \ \neg A)$ — закон логики». На практике NN может знать одни законы и не знать других. Стало быть, эпистемические модальности действительно превращают контекст в интенсиональный.

В настоящее время бурно развиваются интенсиональные логики (логики вопросов, различные модальные логики, в том числе алетические, эпистемические, временные, нормативные и др.), занимающиеся исследованием интенсиональных контекстов. К сожалению, технически и идейно эти логики сложнее, чем классическая экстенсиональная логика, которая строится и используется в этой книге. Разумнее начать с чего-то более простого, тем более, что классическая экстенсиональная логика позволяет успешно анализировать обширные контексты самых разнородных реальных рассуждений. Так, вместо построения интенсиональной временной логики в заключительной части будет предложена несложная экстенсиональная аксиоматическая теория, позволяющая учитывать в рассуждениях временные характеристики событий.

§2. Свойства и отношения

Рассуждая о каких-либо объектах, мы обнаруживаем, что реальность состоит из самых разнообразных индивидов, обладающих теми или иными *свойствами* и вступающих между собой в различные *отношения*. Например, в высказывании «Москва больше Санкт-Петербурга» утверждается, что такие объекты, как города Москва и Санкт-Петербург находятся в отношении «больше». В высказывании «Этот человек болен» утверждается, что индивид, о котором идет речь, приобрел неприятное свойство «быть больным».

Свойства и отношения в логике называются *предикатами*. Всякое *понятие* оказывается либо понятием о свойстве, либо понятием об отношении. Важнейшей онтологической предпосылкой современной логики является тезис о том, что мир членится по объектно-предикатной схеме. *В реальности нет ничего, кроме объектов и их предикатов*. Теория рассуждений строится в соответствии с этой схемой. Утверждения, изучаемые в логике высказываний, в логике предикатов подвергаются дальнейшему анализу, требующему фиксации тех объектов, о которых идёт речь в этих утверждениях, исследования их свойств и отношений. Что значит изучить объект? Это значит установить его свойства и выявить отношения, в которые он вступает с другими объектами.

Вообще говоря, онтологическими предпосылками занимается философия. Философия лежит в основаниях всякого знания потому, что лишь она одна изучает предельно общие характеристики реальности. К сожалению, далеко не всегда философские построения являются образцом ясности и определённости. Но философия способна стать строгой наукой, и тогда она превращается в логику. Объектно-предикатная онтология — единственная онтологическая схема, хорошо разработанная современной логикой. Ничего более лучшего в нашем распоряжении нет. Поэтому стоит потратить время на изучение данной онтологии, хотя это может оказаться нелёгким делом.

Трудности могут подстерегать нас на каждом шагу. Вот только что мы рассуждали... О чём? — Об индивидах, их свойствах и отношениях. Значит, индивиды и их предикаты являются объектами этих рассуждений. Объекты, о которых рассуждают, были названы индивидами. Поскольку рассуждали о предикатах, получается, что не только индивиды являются индивидами, но и предикаты также оказываются индивидами. Так оно и есть!

Утверждение, что каждый предикат есть либо свойство, либо отношение, в действительности приписывает предикату либо свойство «быть свойством», либо свойство «быть отношением». Получается, что у свойств есть свойства и у отношений есть свойства.

Обычно свойства представлены прилагательными. Но прилагательные также имеют свойства. А это уже свойства свойств. В самом начале мы уже сталкивались со свойствами свойств, когда пытались определить, автологично или гетерологично прилагательное «гетерологичный». Как мы помним, свойства автологичности и гетерологичности исключают друг друга, но прилагательное «гетерологичный» автологично тогда, и только тогда, когда оно гетерологично. Это не софизм, а настоящий парадокс, обусловленный чрезмерной свободой при построении рассуждений на естественном языке.

Естественный язык, ориентированный на обыденные формы познания и деятельности, оказывается мало пригодным для строгого анализа свойств объектов и отношений между объектами. Данное обстоятельство (как это уже было в случае логики высказываний) заставляет прибегать к искусственным формальным языкам, позволяющим точно выражать мысли об объектах познания. Построение искусственных логических языков, способных преодолеть неоднозначность естественного языка и адекватно описать сложности реальных познавательных ситуаций, не было простым делом. Хотя логика как наука существует уже около двух с половиной тысячелетий, лишь примерно сто лет назад удалось более или менее удовлетворительно решить поставленную задачу.

Исходная идея состоит в том, чтобы в самом объектном языке на синтаксическом уровне различить обозначения объектов и обозначения предикатов, которые в естественном языке двусмысленны. Рассмотрим простые высказывания «Сократ человек» и «Человек разумен». В первом, совершенно ясно, термин «Сократ» является именем и указывает на индивида, а термин «человек» обозначает свойство «быть человеком». Второе высказывание, при всей его простоте и обыденности, уже отнюдь не отличается ясностью. Очевидно только, что «разумен» — это обозначение свойства. Но что здесь означает «Человек» — то ли объект, о котором рассуждают, то ли свойство, как в первом высказывании? Оба варианта ответа равно приемлемы. В соответствии с первым, «Человек» — это имя объекта, обладающего свойством «разумен», а в соответствии со вторым, «Человек» — это такое свойство, обладание которым влечёт обладание свойством «разумен».

Условимся на первом месте помещать знак свойства, а на втором месте в скобках – ставить указание на индивида, предположительно данным свойством обладающего. Первое высказывание тогда запишется в виде искусственного выражения *Человек(Сократ)*. Прочитать данное выражение можно следующим образом: «Объект «Сократ» обладает свойством «быть человеком»» или, короче, «Сократ обладает свойством Человек». Что касается второго высказывания, то первый вариант его понимания фиксирует аналогичная запись *Разумен(Человек)* (т.е. «Объект «человек» обладает свойством «быть разумным»» или, коротко, «Человек имеет свойство разумности»).

Сложнее со вторым вариантом прочтения. Раз и «Человек», и «Разумен» – свойства, надо использовать записи вида *Человек( )* и *Разумен( )*. Но что поставить на пустые места в скобках? В случае использования какого-либо имени, например, имени «Сократ», проблемы не было бы. Второе высказывание приобрело бы вид *Если Человек(Сократ), то Разумен(Сократ)*, т.е. вид импликации *Человек(Сократ)* $\rightarrow$ *Разумен(Сократ)*. Однако второе высказывание ничего не утверждает ни о Сократе, ни о каком-либо другом поименованном индивиде. Оно говорит о незафиксированном, и в этом смысле неизвестном индивиде. В математике неизвестные величины часто обозначаются буквами x, y, z. И в нашем случае имеется в виду некий неизвестный индивид x! Подставляя x на пустые места, получим выражение *Человек(x)* $\rightarrow$ *Разумен(x)*, что прочитывается как *Если x человек, то x разумен.*

То, что первоначально (в естественном языке) было склеено, удалось различить на уровне синтаксиса. Теперь можно выбирать тот смысл, который вы хотите вложить в предложение «Человек разумен». Предпочтительнее второй вариант понимания данного предложения, поскольку вряд ли термин «человек» в обыденном словоупотреблении указывает на индивида. Ведь в этом случае термин «человек», в соответствии с принятым определением, был бы именем, тогда как естественнее считать его понятием. Появление импликации в переводе второго предложения на искусственный язык не должно смущать. В естественном русском языке далеко не всегда логические связки упоминаются явно.

Рассмотрим утверждение «Человек – это звучит гордо». Интерпретация «Индивид по имени «Человек» звучит гордо» явно нехороша. Лучше выглядит прочтение «Свойство «Человек» звучит гордо». «Звучать гордо» в обоих случаях представляет свойство. Значит, второе прочтение в более развёрнутом виде даёт «Свойство «Человек» обладает свойством «Звучать гордо»». Запишем в предложенной нотации утверждения о том, что «Человек» и «Звучать гордо» – это свойства. Получим *Человек(x)* и *Звучит гордо(x)*. Поскольку второе из этих свойств приписывается первому, возникает мысль записать это в виде *Звучит гордо(Человек(x))*. Формально такая запись противоречит выше сформулированному условию, согласно которому в скобках справа от знака свойства должно стоять указание на индивид. Ведь в *Звучит гордо( )* на пустое место в скобках поставлено *Человек(x)*, являющееся обозначением свойства, а не индивида.

Можно было переформулировать условие и разрешить и такого рода запись, наряду с прежней. Тогда возникает новая онтология, в которой есть объекты (например, *Сократ*), есть свойства объектов (например, *Человек*) и свойства свойств (допустим, то же самое *Звучит гордо*). В такой онтологии как бы три слоя: на нулевом уровне находятся объекты, на первом уровне свойства объектов, а на втором – свойства свойств. Свойства первого уровня назовём *первопорядковыми*, а свойства второго уровня – *второпорядковыми*, в то время как объекты свойствами не являются, почему и остаются на нулевом уровне и не попадают в порядковый перечень свойств.

В логике построена и исследована теория рассуждений, соответствующая такой онтологии. Это так называемая *логика предикатов второго порядка*. Строились также логики третьего порядка (в которых имеются свойства свойств свойств) и вообще логики произвольного порядка (подразумевается, что предикаты более низкого порядка автоматически включаются в такие логики). Эти теории получились слишком сложными технически и не всегда удовлетворительными с точки зрения их метасвойств. Кроме того, в действительности они мало что дали для теории рассуждений. Суть дела в том, что фактически все важные для науки и практики способы рассуждений удаётся адекватно представить уже в первопорядковой логике предикатов. *Логика предикатов первого порядка* основана на онтологии, в которой имеется только два слоя: *объекты* и *первопорядковые предикаты*. Никаких свойств свойств, никаких предикатов от предикатов. Выдающийся математик и логик Д.Гильберт выдвинул тезис, который гласит: *Нет логики, кроме логики первого порядка*. Этот тезис надо понимать в том смысле, что всегда можно обойтись первопорядковыми рассуждениями. Почему это так – вопрос, выходящий за рамки элементарного курса логики. Но это так.

Сказанное позволяет сосредоточиться на построении первопорядковой логики предикатов, без отвлечения на обсуждение логик более высоких порядков. Отныне, если явно не оговорено противное, *свойство* и *отношение* будет означать *первопорядковое свойство* и *первопорядковое отношение*. Т.к. каждый предикат – это свойство или отношение, а понятия и предикаты суть одно и то же, это также будет означать, что мы будем иметь дело с *первопорядковыми понятиями* или *первопорядковыми предикатами*.

Избавившись от призрака многопорядковости, теперь мы готовы уточнить, что такое свойство и что такое отношение.

Свойства «Человек», «Число», «Зелёный», «Храбрый» в языке логики представлены формой P(x): *Человек(x)*, *Число(x)*, *Зелёный(x)*, *Храбрый(x)*. Отношения так представить уже не удастся. Например, отношения «Старше» или «Больше» не запишешь в виде *Старше(x)* или *Больше(x)*. Здесь недостаточно упоминания об одном индивиде. Надо ещё указать, по отношению к какому индивиду данный индивид его старше или его больше. Можно утверждать, что *Человек(Сократ)* и *Число(8)*, но бессмысленно утверждать, что *Старше(Сократ)* и *Больше(8)*. Старше кого и больше чего? – Возникает естественный вопрос. Примерами верных ответов будут: «Сократ старше Платона», а «8 больше 5». Сохраняя прежнюю нотацию, первым запишем знак отношения, а затем в скобках перечислим, какие именно индивиды вступили в данное отношение. Получим истинные высказывания *Старше(Сократ, Платон)*, *Больше(8, 5)*. В общем случае, когда речь идёт о паре неизвестных индивидов, должны использовать запись *Старше(x, y)*, *Больше(x, y)*. Аналогичной структурой обладают отношения «Младше», «Меньше», «Длиннее», «Легче» и многие другие.

Но некоторые отношения требуют упоминания не о двух, а о трёх индивидах. Рассмотрим высказывание «Лондон дальше от Москвы, чем Санкт-Петербург». Слово «дальше» также выражают отношение между объектами. Но это отношение с логической точки зрения отличается от выше приведенных. В самом деле, в любое из ранее рассмотренных отношений вступало только два объекта: x длиннее, чем y, x легче, чем y и т.д. В отношение «дальше, чем» вступают сразу три объекта: x дальше от y, чем z: *Дальше(x, y, z)*. Количество объектов, вступающих в отношение, может быть равным четырем. Действительно, отношение «встретил» требует указания как минимум четырех объектов: x встретил y в момент t в месте s: *Встретил(x, y, t, s)*, т.е. кто, кого, когда и где встретил.

Количество объектов, одновременно вступающих в отношение, является его важной логической характеристикой, называемой *местностью* отношения. Отношения «больше», «меньше», «легче» – двухместные; отношение «дальше» – трехместное; отношение «встретил» – четырехместное. Количество мест в отношении может быть и больше. Другое дело, что в естественном языке нам вряд ли могут понадобиться отношения с большим количеством мест. Для рассуждений на естественном языке можно, по-видимому, ограничится не более чем четырехместными отношениями. С другой стороны, почему бы не считать, что количество мест в отношении может быть меньше двух? Это сразу же придало бы проводимому анализу свойств и отношений целостный характер. Действительно, в современной логике свойства рассматривают как одноместные отношения. Таким образом, с логической точки зрения все предикаты являются отношениями и различаются только количеством мест: от одноместных отношений (или свойств) до многоместных отношений, в которые вступает любое конечное число объектов (бесконечноместные отношения в стандартной логике не рассматриваются). Это позволяет использовать единую форму вида $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ для представления любого отношения местности n (при $n \geq 1$).

При n = 2 отношение называется *бинарным*, при n = 3 – *тернарным*. В случае бинарных отношений разрешается знак отношения ставить не впереди, а между знаками индивидов: вместо *Больше(x, y)* записывать *x Больше y* и т.п. В результате вместо непривычной математической записи >(x, y) можно использовать стандартную запись (x > y).

Однако между свойствами (одноместными отношениями), с одной стороны, и многоместными отношениями (с числом мест более одного), с другой, имеется принципиальное различие.

Разберём следующую ситуацию. Предположим, вам дали небольшой мешок. Поинтересовавшись, что в нем находится, вы получили ответ: «белый шар и черный шар». А если бы ответили: «черный шар и белый шар»? В том случае, когда нас интересует только содержимое мешка, оба варианта ответа равно приемлемы. Представим далее, что принесший мешок предложил нам такую игру. Вы запускаете не глядя руку в мешок и вытаскиваете шар. Если он окажется белым, вы получаете приз; если же он окажется черным, то платите вы. В этой ситуации вам уже не безразлично, что вначале – белый шар или черный.

Другой пример. Вам предложили назвать все семь цветов радуги. Перечисления «зеленый, желтый, красный, фиолетовый, голубой, синий, оранжевый» и «красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый» оба правильно отвечают на поставленный вопрос. Но если далее попросили уточнить, в каком порядке следуют цвета радуги один за другим, то первое перечисление уже не годится в качестве ответа, тогда как второе перечисление будет правильным.

Таким образом, иногда порядок перечисления предметов безразличен, а иногда требуется перечислить их именно в определенном порядке. Условимся о следующих обозначениях. Если список предметов дан в фигурных скобках, то порядок в списке не имеет значения. Если же список дан в уголковых скобках, то порядок перечисления существенен. Следуя введенному соглашению, заключаем, например, что для различных объектов a и b $\{a, b\} = \{b, a\}$, но $<a, b> \neq <b, a>$. И вообще, для n различных объектов $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n\} = \{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_4, a_3, a_2, a_1\} = \{a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, ..., a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и т.д. (в любой комбинации перечисления n-ки объектов), но $<a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n> \neq <a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_4, a_3, a_2, a_1> \neq <a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, ..., a_1, a_2, a_3, a_4>$ и т.д. (здесь любое изменения порядка перечисления приводит к неравенству).

Имеется исключение, в котором различие между перечислением в фигурных скобках и перечислением в уголковых скобках исчезает. Это как бы нулевой случай, когда в списке несколько раз упоминается один и тот же объект. Например, в этом смысле все равно, написать {белый, белый} или <белый, белый> и вообще $\{a, a, ..., a\}$ или $<a, a, ..., a>$ (хотя формальное различие между записью в фигурных скобках и записью в уголковых скобках остается).

Назовем n-ку различных объектов $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n\}$ *неупорядоченной*, а n-ку тех же объектов $<a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n>$ *упорядоченной*. В частности, будем говорить о неупорядоченной паре $\{a, b\}$ и упорядоченной паре $<a, b>$, о неупорядоченной и упорядоченной тройке объектов, четвёрке и т.д.

Раньше мы определили, что денотатами понятий, а, значит, и денотатами предикатов, будут совокупности индивидов. Но совокупности могут быть устроены просто, а могут быть и более сложными. С этой точки зрения, **свойство** – *это знак, обозначающий совокупность (пустую, конечную или бесконечную) индивидов* $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, в то время как n-местное **отношение** (при $n \geq 2$)– *это знак, обозначающий совокупность (пустую, конечную или бесконечную) упорядоченных n-ок индивидов* $\{<a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}>, <a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}>, ..., <a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}>, ...\}$.

Например, свойство *Положительное целое число (x)* в качестве денотата имеет бесконечную совокупность индивидов {1, 2, ..., n, ...}. Двухместное отношение *Больше(x, y)*, определённое на положительных целых числах, будет иметь денотат вида {<2, 1>, <3, 1>, ..., <99, 1>, ..., <3, 2>, <4, 2>, ...}. Отметим, что сами совокупности заключены в фигурные скобки, и потому являются неупорядоченными. Безразлично, в каком порядке перечислены элементы этих совокупностей. Могли бы записать, скажем, {2, 4, 6, 8, ..., 1, 3, 5, 7, ...} или {<3, 2>, <4, 2>, ..., <2, 1>, <3, 1>, ..., <99, 1>, ...}. Но если элементами совокупностей являются упорядоченные пары, то менять местами элементы пар, вообще говоря, нельзя. В рассматриваемом примере упорядоченная пара <99, 1> принадлежит денотату отношения «больше», поскольку 99 больше 1, но пара <1, 99> не принадлежит этому отношению, т.к. неверно, что 1 больше 99.

Понимание свойств как совокупностей индивидов, а отношений как совокупностей упорядоченных наборов индивидов, введённое современной логикой, было величайшим достижением. Традиционная логика и основанная на ней традиционная философия не справились с проблемой отношений. Вот на заре философии софисты обсуждают понятие «Отец»[8]. Если кто-то стал отцом, то он приобрёл свойство «Быть отцом». Отцом Сократа был Софрониск, а отцом его сводного брата Патрокла – Хэредем. Значит, Софрониск – отец и Хэредем – отец. Но Софрониск не отец Патрокла, а Хэредем не отец Сократа. Значит, Софрониск – не отец, и Хэредем – тоже не отец. Следовательно, Софрониск и Хэредем и отцы, и не отцы, что противоречиво. Выход софисты находят в том, чтобы, признав однажды, что некто отец, признать и то, что он отец для любого, имеющего отца. В частности, поскольку пёс Ктисиппа отец, то он отец и самого Ктисиппа.

Эти софистические рассуждения блокируются указанием на то, что «Отец» – это не свойство, а бинарное отношение *Отец(x, y)* или, в другой форме записи, *x Отец y*. Этому отношению удовлетворяют одни упорядоченные пары индивидов и не удовлетворяют другие. Поэтому, если верно, что Софрониск отец Сократа, то отсюда никак не вытекает, что он также отец Патрокла или Ктисиппа. Если же мы всё-таки хотим рассмотреть не отношение, а свойство *Отец(х)*, образовав совокупность индивидов, являющихся чьими-то отцами, то теперь мы лишаемся права спрашивать, чьи конкретно это отцы, ибо невозможно, чтобы одна и та же совокупность была совокупностью упорядоченных пар и одновременно не была ею, являясь свойством. В совокупность отцов, между прочим, действительно попадёт и отец Ктисиппа, и его пёс как отец своих щенят, но из этого никоим образом не следует, что пёс также отец Ктисиппа, т.е. что упорядоченная пара <пёс Ктисиппа, Ктисипп> принадлежит отношению *Отец(х, у)*.

К сожалению, на понятиях естественного языка нет бирок с указанием местности скрывающихся за ними отношений. А поскольку рассуждать о свойствах много легче, чем об отношениях, люди порой бессознательно пытаются свести к свойствам то, что по сути является отношениями. В основе даже великих философских систем лежало это распространённое заблуждение.

В другом диалоге[9] Сократ просит Гиппия определить, что такое прекрасное. Глуповатый Гиппий отвечает, что прекрасное — это прекрасная девушка. Сократ поясняет, что ему не нужны примеры прекрасного, но интересует ответ на вопрос, что такое «прекрасное само по себе, благодаря которому все остальное украшается и представляется прекрасным, — как только эта идея присоединяется к чему-либо, это становится прекрасной девушкой, кобылицей, либо лирой»? Из таких рассуждений впоследствии выросла теория эйдосов Платона. С логической точки зрения, здесь не правы ни Гиппий, ни Сократ. Гиппий ошибается потому, что общее понятие о прекрасном пытается необоснованно свести к его частному случаю — понятию прекрасной девушки. Ошибка Сократа неочевидна и спрятана достаточно глубоко. Логика его рассуждений исходит из неявной предпосылки, что прекрасное — это свойство. А свойство — это идея, присоединение которой к вещи делает из вещи носителя данного свойства.

Но в действительности нет единой идеи прекрасного, ибо понятие прекрасного — это бинарное отношение, а не свойство. Индивиды признаются прекрасными не благодаря тому, что в них есть нечто изначально и безусловно прекрасное, а становятся прекрасными в некоторой системе ценностей. А системы ценностей могут быть различны. Одну мою знакомую воротит от одного вида змеи, но в то же время она обожает пауков. В её индивидуальной системе ценностей змеи безобразны, а пауки милы и прекрасны. Представители народа мелпа из Папуа–Новой Гвинеи украшают себя цветными перьями, раковинами и расписывают лица красками. Они считают красивыми длиннобородых мужчин и длинноносых мужчин и женщин. Можно сколько угодно приводить примеров такого рода. Значит, логическая форма понятия «прекрасное» – это не форма свойства *Прекрасен(x)*, а форма бинарного отношения *Прекрасен(x, y)*, т.е. x прекрасен для y.

Долгое время полагали, что отношение «одновременно» бинарно: событие x произошло одновременно с событием y. Если теория относительности верно описывает мир, то это отношение оказывается тернарным. Скажем, два индивидуальных события s и s' могут быть одновременными в одной системе отсчёта k и не одновременными в другой системе k'. В результате высказывания «s одновременно с s' в k» и «неверно, что s одновременно с s' в k'» оказываются вместе истинными. В итоге понятие одновременности приобретает вид *Одновременно(x, y, z)*.

Можно было бы привести и другие поучительные примеры того, как под влиянием науки пересматривались привычные стереотипы в интерпретации, казалось бы, хорошо известных понятий.

§3. Кванторы и универсумы рассуждений

Формулируя утверждения о свойствах и отношениях, нам необходимо уметь высказываться о количестве индивидов, обладающих некоторым свойством или вступающих в какое-то отношение. *Слова, указывающие, сколько индивидов обладает свойством или вступает в отношение, называются* **кванторами**.

В утверждении «Ровно 99 индивидов обладают свойством P» слова «Ровно 99 индивидов» играют роль квантора. В высказывании «Большинство людей не изучали логику» квантором будет слово «Большинство». Аналогичным образом, в качестве кванторов могут выступать слова «Подавляющее большинство», «Меньшинство», «Более n индивидов», «Менее n индивидов», Ровно n индивидов» (где вместо n стоит имя целого положительного числа), «Чётное число индивидов», «Нечётное число индивидов», «Простое число индивидов», «Конечное количество индивидов» «Бесконечно много индивидов» и т.п. Даже такие неопределённые слова, как «Много», «Мало», «Очень много», «Очень мало» также являются достаточно широко применяемыми кванторами.

Логику как точную науку не устраивают кванторы с неопределённым значением. Отметим также, что не бывает кванторов с дробными значениями. Выражение «Полтора землекопа» в рассуждении о таких индивидах, как землекопы, не только неуместно, но и бессмысленно. Вообще, если вы рассуждаете о каких угодно индивидах, вы всегда обязаны исчислять их целиком, а не по частям. Если угодно говорить о дробях, то тогда сами дроби будут целостными индивидами, и вы всё равно не сможете применить дробный псевдоквантор вида «полторы дроби» или «две с половиной дроби». Если рассуждаете о дозируемых веществах, то дроби появятся на местах индивидов, а не на местах кванторов.

Рассмотрим утверждение «Я выпил полтора стакана молока». Основу этого высказывания образует бинарное отношение «выпил»: *Выпил(x, y)*. На место неизвестного индивида *y* можно ставить любую дробь, отражающую количество выпитого (например, два стакана, чайную ложку с четвертью, пол бидона и т.д.), но нельзя сказать «х выпил полтора у», равно как нельзя сказать «половина х выпила у» или, объединяя выражения, «половина х выпила полтора у».

С логико-философской позиции, объекты рассуждений, т.е. индивиды, далее неделимы. Это своего рода атомы рассуждений. Поэтому они поддаются исчислению только целиком. Если требуется рассуждать об их частях, необходимо в качестве индивидов взять эти части. В любом случае, кванторные слова отражают эту ситуацию. Разумеется, сказанное нуждается в уточнении.

Оказывается, для очень широкого круга логических задач достаточно взять два квантора. Первый квантор называется квантором *всеобщности* и в естественном языке передаётся такими словами, как «все», «каждый», «любой» и т.п. Второй квантор – квантор *существования*, который выражают слова «существует», «найдётся», «некоторые» и т.п. Квантор всеобщности в логике обозначается символом $\forall$, а квантор существования – символом $\exists$.

Пусть дано понятие *Смертный(x)*. Если требуется сказать, что каждый индивид х смертен, то применим запись $\forall x$*Смертный(x)*. Если только некоторые индивиды х смертны, то запись изменится на $\exists x$*Смертный(x)*. В случае бинарных отношений эти два квантора можно расставить восемью способами. Возьмём для конкретности понятие «$x > y$» («x больше y»). Получим $\forall x \forall y(x > y)$ (Для всякого x, для всякого y, x больше y), $\forall x \exists y(x > y)$ (Для любого x найдётся такой y, что x больше y), $\exists x \forall y(x > y)$ (Существует такой x, что для каждого y x больше y), $\exists x \exists y(x > y)$ (Имеются такие x и y, что x больше y). Ещё четыре варианта дадут записи $\forall y \forall x(x > y)$, $\forall y \exists x(x > y)$, $\exists y \forall x(x > y)$, $\exists y \exists x(x > y)$. Аналогичным образом строятся кванторные приставки для тернарных и вообще n-арных отношений.

В чём смысл утверждений $\forall x$*Смертный(x)* и $\exists x$*Смертный(x)*? Казалось бы, он очевиден: первое высказывание говорит, что каждый индивид смертен, а второе – что некоторые индивиды смертны. Числа являются хорошим примером индивидов. Тогда, поскольку первое высказывание нечто утверждает обо всех индивидах, оно это утверждает и о числах. Но что могут означать утверждения «5 смертно» или «1 смертно»? Перед нами явно бессмысленные утверждения! Избавиться от них нетрудно. *Достаточно потребовать, чтобы кванторы относились не к каким угодно индивидам, а к некоторому заранее выбранному непустому множеству индивидов. Такое множество называется* **универсумом рассуждений**. В нашем примере в качестве универсума можно взять множество людей, живых организмов, разумных созданий и т.п. Однако вряд ли целесообразно включать в универсум неорганические предметы или идеальные объекты, вроде чисел.

Универсумы рассуждений важны и в другом отношении. Отметим, что квантор всегда входит в выражение с указанием той индивидной переменной, на которую он действует. Для свойств это не столь существенно (можно было просто сказать «все смертны» или «существуют смертные», без явного упоминания x), однако для отношений уже очень важно, на какие переменные действует квантор. Рассмотрим высказывания $\forall x \exists y(x > y)$ и $\forall y \exists x(x > y)$. Пусть универсумом рассуждения является множество положительных целых чисел $N^+ = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$. В этом универсуме высказывание $\forall x \exists y(x > y)$ ложно. Действительно, в нём утверждается, что для любого числа x найдётся такое y, что будет $x > y$. Но для 1 в данном универсуме нет такого y, что $1 > y$. Зато второе высказывание $\forall y \exists x(x > y)$ истинно в N^+. Ведь оно говорит, что для любого числа y найдётся число x такое, что $x > y$. Нужное x на самом деле найдётся. Достаточно взять $x = y + 1$, и получим требуемое $x > y$. Но если в качестве универсума взять множество всех отрицательных целых чисел $N^- = \{-1, -2, -3, ..., -n, ...\}$, то высказывание $\forall x \exists y (x > y)$ окажется истинным, а высказывание $\forall y \exists x (x > y)$ ложным. Поэтому, повторим, надо тщательно следить за тем, к каким переменным относятся кванторы и помнить об универсуме рассуждений.

Чтобы избежать путаницы и бессмыслицы, необходимо точно определить, о каких объектах мы будем рассуждать. *В качестве объектов рассмотрения логика позволяет брать любые объекты, независимо от того, существуют они в качестве физических предметов или только в воображении людей.* Объектами рассуждений могут быть числа и планеты, люди и животные, сказочные персонажи и исторические деятели, теории и языки, книги и компьютеры – все это и многое другое может образовывать универсумы рассуждений. Прежде всего следует выделить класс (или множество) интересующих нас объектов. Эти объекты в совокупности составят универсум объектов. Это своего рода целый мир, за пределы которого в рамках данной группы рассуждений выходить мы не имеем права.

Например, в математике универсум объектов (или, для краткости, просто универсум) часто составляют числа, числовые функции, геометрические структуры и другие абстрактные объекты. В медицине речь должна идти об объектах другого рода – болезнях, больных, лекарствах, способах лечения и т.п. На практике далеко не всегда очевидно, класс каких объектов следует взять в качестве универсума. Но сделать это необходимо, если мы хотим получать точные выводы в рассуждениях, применять для анализа информации компьютеры или правильно интерпретировать данные научных исследований.

Надлежащий выбор универсума рассуждений является задачей соответствующей науки и не может быть осуществлен исходя из каких-то общих соображений. Логика предикатов начинается с предположения, что универсум объектов уже имеется. Какие конкретно это объекты – не столь важно. Существенно, однако, чтобы универсум объектов не оказался пустым, т.е. не содержащим ни одного объекта. Ведь в этом случае просто не о чем рассуждать. Итак, *универсум рассуждений должен быть непуст, в нём обязательно должен содержаться хотя бы один индивид.*

Иногда возникают бессмысленные высказывания о принадлежности свойств объектам. Так, философ Гегель, желая продемонстрировать беспомощность формальной логики, задавал вопрос: дух зеленый или дух не зеленый? Высказывание вида A $\vee \neg$A является законом и доказуемо в качестве теоремы исчисления высказываний. Частным случаем этого закона будет высказывание *Зелёный(дух)* $\vee \neg$*Зелёный(дух)*. Однако ясно, что утверждать или отрицать что-либо о цвете духа бессмысленно. В чем здесь дело? Ответ заключается в требовании четко фиксировать универсум объектов U и задавать их свойства и отношения только на универсуме U. И если кто-то хочет адекватно рассуждать о бесплотных духах, то он не должен приписывать им свойства материальных объектов, в случае заведомой пустоты этих свойств для данного универсума.

Этот пример показывает, что пустота или не пустота какого-то понятия зависит от принятого универсума. Для универсума чисел понятия чётного и нечётного непусты, но на универсуме людей они заведомо пусты и потому бессмысленны. Действительно, в каком даже гипотетическом смысле человек может быть чётным или нечётным? Мы должны в качестве исходных принимать такие свойства и отношения, которые предположительно будут непустыми в выбранном универсуме рассуждений. *Логика допускает возникновение пустых понятий в ходе рассуждений, но не сознательное включение в число исходных предикатов понятий, о которых заранее известно, что они в выбранном универсуме пусты.*

Не имеющие представления об универсумах рассуждений традиционные логики производят забавное впечатление, когда пытаются приводить примеры пустых понятий. Не сговариваясь, они здесь вспоминают о леших, русалках и других сказочных персонажах. Очевидно, они имеют в виду, что лешие, русалки, ведьмы, домовые и прочие представители нечистой силы не существуют физически. Но если дело в физическом существовании, то пустым окажется понятие числа, понятие функции и вообще практически все понятия математики. Но почему-то стыдятся сделать этот вывод и, опасаясь трогать точные науки, отыгрываются на безответных сказочных персонажах. Интересно, а как оценит традиционный логик пустоту или не пустоту понятия «персонажи романа М.Булгакова «Мастер и Маргарита»»? Включит в его объем Мастера, Маргариту, Берлиоза, Аннушку и других реалистических лиц, и исключит Воланда, Кота и Коровьева на том основании, что они не существуют? Но ведь и остальные герои романа придуманы и физически не существуют!

Впрочем, бесполезно ждать от пишущих учебники по традиционной логике ответов на поставленные вопросы. Посмотрим лучше, как на них отвечает логика современная. Повторим ещё раз: в качестве универсума рассуждений логика разрешает брать любую непустую совокупность индивидов. Если вы желаете рассуждать об объектах народной фантазии, то смело берите универсум таких объектов и приступайте к его изучению. Если вас интересуют бесплотные идеальные числа, погружайтесь в увлекательное исследование универсума чисел. Или займитесь литературоведческим анализом универсума вымышленных персонажей повестей и романов. И т.д.

Так что же, ничего пустого по сути нет и каждое из понятий в каком-либо универсуме будет непустым? Нет, это не так. Если на одной странице вы утверждаете, что леший – существо мужского пола, а русалка – женского, а на другой уверяете, что всё наоборот, то при естественном допущении, что нельзя быть мужчиной и женщиной одновременно, вы получите совокупность утверждений, которые невозможно одновременно сделать истинными ни в каком универсуме. В таком случае вы рассуждаете ни о чём и универсум ваших рассуждений пуст. Если вы исходите из того, что свойства «быть круглым» и «быть квадратным» исключают друг друга, а после этого вздумаете изучать круглые квадраты, то понятие «круглый квадрат» будет пустым в любом универсуме.

Иначе говоря, если ваши утверждения противоречат друг другу, то универсум ваших рассуждений будет пуст. И если вы взяли противоречивое понятие, то оно будет пустым в любом универсуме. Если же принятая система утверждений непротиворечива, найдётся непустой универсум, в котором эти утверждения будут вместе истинными. То же и для понятий: непротиворечивое понятие в каком-либо универсуме окажется непустым. Отсюда вытекает следующий онтологический принцип современной классической логики: *всё, что может быть описано непротиворечиво, существует*. Для логики проблема не в том, чтобы заранее по наитию сказать, существуют ли вечные двигатели, рыцари круглого стола, трансцендентные числа или олимпийские боги. Настоящая проблема логики в том, чтобы установить, можно ли всё это непротиворечивым образом описать.

Заострим ситуацию. Из вышеприведённых рассуждений вытекает, что понятие вечного двигателя является непустым в том смысле, что найдётся непустой универсум, в котором существуют вечные двигатели! Только для традиционного логика что вечный двигатель, что круглый квадрат – всё едино. Современная логика тщательно различает две вещи: *логическую непротиворечивость* и *непротиворечивость фактическую*. Понятие объекта, круглого и квадратного (т.е. не круглого) одновременно, логически противоречиво. Утверждение о существовании вечного двигателя противоречит установленным современной физикой фактам (даже если эти факты физики называют законами), но, вообще говоря, не противоречит логике и её законам. Можно представить себе мир, в котором действуют иные физические законы, и в котором вечные двигатели существуют. Но в рамках строгого мышления невозможно даже в воображении сконструировать мир, в котором бы существовали круглые квадраты.

Если в думаться, то всё это совершенно естественно. Чтобы успешно служить основанием для всех наук, логика ничего не должна запрещать сверх того, что запрещают эти науки. Логика – настолько абстрактная наука, что она запрещает меньше всех других наук. Зато ее запреты абсолютны, в то время как запреты всех других наук относительны. По сути, логика запрещает противоречия и больше ничего. Значит, противоречия находятся под запретом в любой науке. Но специфические ограничения других наук для логики не действительны.

В самом деле. Упорядочим основные научные направления по степени возрастания запретов. Получим ряд *логика – математика – физика – биология – социология – история*. Математика запрещает больше, чем логика. Помимо непротиворечивости, математика требует, чтобы было $2 \times 2 = 4$. Логика не требует даже этого! В универсуме, содержащем только один индивид, нет и быть не может ни двух, ни, тем более, четырёх индивидов. Физики принимают закон сохранения энергии, запрещающий вечные двигатели. Однако строятся математические теории, в которых этот закон не действует. Биология налагает запрет на существование огнедышащих животных, но существование химер и змеев горынычей не противоречит законам физики. Ещё больше запрещает социология и, в особенности, история. Ни один даже мельчайший исторический факт историк отменить не в силе, ему сослагательные рассуждения вида «что было бы, если бы случилось не это, а то» запрещены. Однако социолог может свободно рассуждать о возможных сценариях прошлого и будущего развития, не обращая внимания на исторически случайное стечение событий. Таким образом, логик и историк находятся на противоположных эпистемологических полюсах: в логике существует всё, что непротиворечиво, а в истории существует только то, что фактически произошло в действительности, со всеми её закономерностями и случайностями. Логик допускает существование максимально обширного множества возможных миров, тогда как для историка существует только один-единственный реальный мир.

§4. Язык логики предикатов

Уточним и обобщим идеи и конструкции предыдущих параграфов данной главы. Начнём с алфавита языка логики предикатов.

Алфавита языка логики предикатов.

1. Бесконечный перечень имён a, b, c, d, a_1, a_2, ..., a_n, ...

2. Бесконечный перечень индивидных переменных x, y, z, x_1, x_2, ..., x_n, ...

3. Для каждого $n \geq 1$ имеется бесконечный перечень n-местных предикатов $P(x_1, ..., x_n)$, $Q(x_1, ..., x_n)$, $R(x_1, ..., x_n)$, $P_1(x_1, ..., x_n)$, $Q_1(x_1, ..., x_n)$, $R_1(x_1, ..., x_n)$, ..., $P_m(x_1, ..., x_n)$, $Q_m(x_1, ..., x_n)$, $R_m(x_1, ..., x_n)$, ...

4. Логические связки $\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$.

5. Кванторы $\forall$ и $\exists$.

6. Левая и правая скобки (и).

Мы оставляем возможность на будущее пополнять алфавит новыми символами.

Терм – это либо имя, либо индивидная переменная. Термы будем обозначать буквами s, t, t_1, ..., t_n.

Определение формулы языка логики предикатов.

1. Каждый n-местный предикат из пункта 3 определения алфавита является формулой.

2. Пусть A(s) – формула, не содержащая кванторов, в которую входит терм s, и t – любой терм. Тогда выражение A(t), полученное из A(s) заменой терма s на терм t, – тоже формула.

3. Если A – формула, то $\neg$A – формула.

4. Если A и B – формулы, то (A & B), (A $\vee$ B) и (A $\rightarrow$ B) – формулы.

5. Пусть A(v) – формула, в которую входит индивидная переменная v. Пусть также A(v) не содержит вхождений кванторов вида $\forall$v или $\exists$v. Тогда выражения $\forall$vA(v) и $\exists$v A(v) – формулы.

6. Ничто другое формулой не является.

В логике предикатов алфавит и понятие формулы сложнее, чем в логике высказываний. Тем не менее, никаких трудностей с построением формул и проверкой выражений на наличие метасвойства «быть формулой» возникнуть не должно. Надо просто аккуратно применять определения.

Так, выражение $R(x_1, x_2, x_3)$ является формулой по пункту 1. По пункту 3, $\neg R(x_1, x_2, x_3)$ – тоже формула. В неё входит терм x_2 и она не содержит кванторов. Но b – это терм. Следовательно, по пункту 2, можно заменить x_2 на b, получив формулу $\neg R(x_1, b, x_3)$. Терм x_3 является индивидной переменной, а квантор $\forall x_3$ не входит в формулу $\neg R(x_1, b, x_3)$. Значит, по пункту 5, $\forall x_3 \neg R(x_1, b, x_3)$ – формула. В формуле $\forall x_3 \neg R(x_1, b, x_3)$ терм x_1 является индивидной переменной, причём квантор $\exists x_1$ не входит в эту формулу. Опять применяя пункт 5, получаем, что $\exists x_1 \forall x_3 \neg R(x_1, b, x_3)$ – формула.

Пусть v – индивидная переменная, входящая в формулу А. Вхождение v в формулу А называется *свободным*, если в А нет частей вида $\forall$v или $\exists$v. Вхождение v в формулу А называется *связанным*, если каждое вхождение v попадает в формулу вида $\forall$vB или $\exists$vB. Например, в формулу $\exists y(P(x, y, z)\ \&\ \forall z Q(x, y, z))$ x входит свободно, y – связанно, а z – и не свободно и не связанно. *Формула, в которой имеются свободные индивидные переменные, называется* **понятием**. *Формула, в которой или нет индивидных переменных, или они все связанны, называется* **высказыванием**.

Чтобы уразуметь суть последних определений, необходимо обратиться к семантике языка логики предикатов. Из-за технических и теоретических сложностей мы не будем (в отличие от логики высказываний) строить точную семантику для рассматриваемого языка и ограничимся лишь полу формальными уточнениями.

Мы видели, что формулы типа P(x), R(x,y) и т.п. представляют понятия. Допустим, для определённости, что речь идёт о свойстве чётности и отношении больше на универсуме положительных целых чисел N^+. Сказать *Чётно(x)* или $(x > y)$ – это не значит что-либо утверждать или отрицать. Просто в дискурс вводятся соответствующие понятия, сформулированные при помощи упоминания неизвестных индивидов. Эти выражения сами по себе не истинны и не ложны, ибо неизвестно, о каких конкретных объектах идёт речь. Одни числа чётны, другие нечётны; одно число может быть больше другого, но меньше третьего и т.п. Здесь опять наблюдается расхождение между традиционной логикой и философией, которые допускают нелепые утверждения о том, что понятия могут быть истинными или ложными.

Но понятие *Чётно(x)* моментально превратится в высказывание, как только вместо неизвестного x будет подставлено имя конкретного числа, т.е. конкретная цифра. Заменив x на 4, получим истинное высказывание *Чётно(4)*, заменив x на 5, получим ложное высказывание *Чётно(5)*. Аналогичный результат получается при помощи кванторов. Выражения $\forall x$*Чётно(x)* и $\exists x$*Чётно(x)* являются высказываниями, причём первое высказывание ложно, а второе истинно.

Применим эту же процедуру к отношению $>$. На этот раз замена x на 4 не приводит к высказыванию. Выражение $(4 > y)$ содержит свободно переменную y, поэтому вновь ничего определённого не утверждает. Оно представляет понятие «Числа, меньшие 4». Именно меньшие, поскольку 4 их больше! Убрать оставшуюся свободную переменную можно либо заменив её именем, либо связав квантором. Первый метод даёт, например, истинное высказывание $(4 > 2)$, а второй – истинное высказывание $\exists y(4 > y)$.

В любом случае понятие остаётся понятием, пока в соответствующей формуле остаётся хотя бы одна свободная переменная. После устранения всех свободных переменных, мы из понятия получаем высказывание (как и полагается, истинное или ложное в выбранном универсуме). Способов устранения свободных переменных два: либо замена их именами, либо связывание их кванторами. Для многоместных отношений эти два способа можно комбинировать, как мы только что видели.

Ситуация существенно отличается от анализа рассуждений в рамках логики высказываний. Теперь мы можем учитывать внутреннюю структуру высказываний и в соответствии с ней пытаться определять истинностные значения исходных утверждений об отношениях. Для этого уже недостаточно просто строить таблицы истинности. Мы должны зафиксировать непустой универсум объектов U, перечислить интересующие нас имена и отношения, определить их на универсуме U путем указания денотатов имён и построения соответствующих отношениям множеств, и лишь затем выяснять истинность или ложность утверждений об отношениях между объектами из U.

Проблема установления истинностных значений усложняется, если в утверждении используются кванторы. В высказывании $\forall x P(x)$ x – переменная, «пробегающая» по всем объектам универсума. Смысл этого высказывания в том, что всякий раз, когда взят (конкретный) объект *a* из универсума U, утверждается истинность P(*a*), т.е. что объект *a* обладает свойством P. В высказывании $\exists x P(x)$ переменная x также «пробегает» по всем объектам универсума. Но смысл этого высказывания уже другой: в нем утверждается, что найдется по крайней мере один объект *a* из U такой, что верно P(*a*). Для того, чтобы убедиться в существовании таких объектов, мы должны, вообще говоря, проверить все конкретные объекты универсума на наличие свойства P. Ведь если проверили все, кроме одного-единственного объекта *b*, то вполне может оказаться, что ¬P(*a*) для каждого из подвергшихся проверке объектов, но P(*b*) для объекта *b*. Но как раз объект *b* обеспечит истинность высказывания $\exists x P(x)$, поэтому не только в случае квантора общности ∀, но и в случае квантора существования ∃ переменная должна «пробегать» весь универсум.

Особо отметим то обстоятельство, что в случае конечных универсумов от кванторов можно в принципе избавиться. Пусть универсум U содержит n объектов $a_1, a_2, ..., a_n$. Тогда следующие высказывания оказываются эквивалентными.

$$\forall x(P(x)) \leftrightarrow (P(a_1) \ \& \ P(a_2) \ \& \ ... \ \& \ P(a_n))$$

Для квантора существования при тех же условиях эквивалентными окажутся следующие высказывания.

$$\exists x(P(x)) \leftrightarrow (P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n))$$

Иначе говоря, утверждение о том, что все объекты универсума обладают свойством P, эквивалентно конъюнкции утверждений о том, что каждый конкретный объект универсума обладает свойством P. Соответственно, утверждение о существовании объекта, обладающего свойством P, эквивалентно дизъюнкции утверждений о том, что каждый конкретный объект универсума обладает свойством P. Здесь наглядно видно, что и в случае квантора общности ∀, и в случае квантора существования ∃ переменная x «пробегает» по всему универсуму (см. правую часть приведенных эквивалентностей). Однако в первом случае используется конъюнкция, а во втором – дизъюнкция тех же самых утверждений. Как известно, конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда каждый ее член истинен. С другой стороны, для истинности дизъюнкции достаточно, чтобы хотя бы один ее член оказался истинным. Различие в условиях истинности конъюнкции и дизъюнкции определяет в случае конечного универсума различие между квантором ∀ и квантором ∃.

Кроме того, в конечных универсумах использование этих кванторов в принципе не обязательно, поскольку высказывание с кванторами всегда можно (опять-таки в принципе) заменить на соответствующую конъюнкцию или дизъюнкцию. Мы не случайно говорим «в принципе», поскольку в реальных ситуациях конечные универсумы зачастую оказываются слишком большими для проведения операции устранения кванторов. Действительно, представьте, что универсум содержит несколько тысяч объектов – уже в этом случае практически невозможно каждый раз выписывать утверждения, содержащее тысячи знаков. Однако при представлении информации на ЭВМ уже оказывается возможной проверка тысяч или даже миллионов утверждений с ее помощью, так что в случае доступных компьютерам по памяти и быстродействию универсумов объектов можно получать ответы на вопросы типа «Существует ли в базе данных объект, обладающий свойством P?» посредством прямой машинной проверки всех объектов на наличие или отсутствие у них свойства P.

Однако в случае конечных, но слишком больших универсумов, или в случае бесконечных универсумов возможность прямой проверки всех объектов универсума на наличие или отсутствие у них свойств или отношений, вообще говоря, исключается. В такой ситуации избежать употребления кванторов не удастся. Зная истинностные значения высказываний в языке логики предикатов и соединяя их логическими связками, уже можно применить табличные определения связок для выявления истинностных значений полученных таким путем утверждений. Но установление истинностных значений высказываний, содержащих кванторы, в бесконечных универсумах требует просмотра бесконечного числа возможных вариантов, поэтому логику предикатов нельзя свести к какой-либо конечной семантике.

Логика предикатов устанавливает на синтаксическом уровне закономерные связи между высказываниями, содержащими кванторы, что позволяет на основе таких законов получать информацию об истинности или ложности этих высказываний, не прибегая к прямой проверке объектов универсума. В этом, собственно говоря, состоит значение данного раздела логики.

Продемонстрируем возросшие по сравнению с логикой высказываний выразительные возможности логики предикатов. Практически любое более или менее чётко сформулированное утверждение естественного языка может быть переведено на язык логики предикатов. Рассмотрим высказывание

(1) *Все люди смертны.*

С помощью квантора общности и импликации его можно записать следующим образом.

(1.1) $\forall$x(Человек(x) $\to$ Смертен(x))

(Читается «Для любого x, если x – человек, то x – смертен», или «Для всякого x, если человек x, то смертен x»; возможны и иные варианты прочтения.)

Высказывание

(2) *Некоторые люди долгожители*

запишется при помощи квантора существования и конъюнкции следующим образом.

(2.1) $\exists$x(Человек(x) & Долгожитель(x))

(Читается «Существует x такой, что человек x и долгожитель x», или «Некоторые x и люди, и долгожители», или «Найдется такое x, что x – человек и x – долгожитель»; опять-таки возможны и другие варианты прочтения.)

Обратимся к высказыванию

(3) *Все совершеннолетние, кроме невменяемых, обязаны отвечать за свои поступки.*

Очевидно, в данном высказывании упомянуты такие свойства, как «Быть совершеннолетним», «Быть невменяемым» и «Отвечать за свои поступки». Обозначим эти свойства через С, Н и О соответственно. Поскольку в утверждении речь идет о всех людях, при переводе уместно использовать квантор общности. Проанализируем теперь высказывание

(3.1) $\forall$x((С(x) & $\neg$Н(x)) $\to$ О(x)).

При буквальном прочтении (3.1) звучит как «Для всякого объекта x, если совершеннолетний x и неверно, что невменяем x, то x обязан отвечать за свои поступки». Как всегда, возможны иные варианты прочтения (3.1), в том числе грамматически более приемлемое (3).

Не следует надеяться для каждого высказывания естественного языка получить однозначный перевод на язык логики предикатов. Разберём, например, высказывание

(4) *Не все юристы знают логику.*

Какие отношения и свойства можно выделить в этом высказывании? Обычно начинающие изучение логики выделяют отношение «x Знает y», и два свойства: «Юрист(x)» и «Логика(y)». Затем пытаются вначале записать что-то вроде $\neg\forall$x(Ю(x) $\to$ xЗ...). Что делать дальше, не понятно. Если применить запись $\neg\forall$x(Ю(x) $\to$ x З Л(y)), то это вообще не формула нашего языка, поскольку на индивидном месте стоит свойство Л(y), т.е. это какое-то второпорядковое выражение. Если просто записать $\neg\forall x(Ю(x) \to x\ З\ y)$, то куда делось свойство «Быть логикой»? Вариант $\neg\forall x(Ю(x)\ \&\ Л(y) \to x\ З\ y)$ не годится потому, что перед нами понятие, а не утверждение, как требовалось. Значит, надо связать свободную переменную *y* квантором. Каким квантором и куда его поставить? Можно, например, записать

(4.1) $\forall y\neg\forall x(Ю(x)\ \&\ Л(y) \to x\ З\ y)$.

Формально это правильно, но совершенно не естественно, потому что вместо уточнения логического смысла и так интуитивно достаточно ясного высказывания (4) мы лишь затемнили этот смысл.

Проблема перевода упростится, если сообразить, что слово «логика» в данном контексте — это не свойство, а имя определённой науки. В этом случае в универсум рассуждения входят такие индивиды, как люди и различные науки. Теперь (4) может быть переведено как

(4.2) $\neg\forall x(Ю(x) \to x\ З\ л)$.

Но всё же нельзя утверждать, что формула (4.1) не является переводом высказывания (4). Может быть, это неуклюжий перевод, но всё же перевод данного высказывания. Даже если мы предпочтём более элегантный и адекватный исходному высказыванию перевод (4.2), не надо думать, что невозможно найти другие переводы, вскрывающие дополнительные оттенки смысла высказывания (4). Рассмотрим следующее высказывание.

(4.3) $\exists x(Ю(x)\ \&\ \neg З(x, л))$.

Как мы убедимся в дальнейшем, высказывания (4.2) и (4.3) эквивалентны, т.е. с логической точки зрения имеют тот же самый смысл. (Проверьте свою логическую интуицию: действительно ли (4.2) и (4.3) воспринимаются вами как имеющие тот же самый логический смысл?)

Вообще, любые высказывания вида $\neg\forall x(A \to B)$ и $\exists x(A\ \&\ \neg B)$ эквивалентны:

$$\neg\forall x(A \to B) \leftrightarrow \exists x(A\ \&\ \neg B).$$

Знака «$\leftrightarrow$» в объектном языке логики предикатов нет, но его можно вести как сокращение:

$(A \leftrightarrow B)$ есть сокращение формулы $(A \to B)\ \&\ (B \to A)$.

Конечно, вариант перевода (4.2) ближе по формулировке к исходному высказыванию (4), но и вариант (4.3) в силу эквивалентности не может быть отброшен. Итак, переводы с естественного языка на язык логики предикатов осуществляются с точностью до эквивалентных высказываний. Это означает, в частности, что если в качестве перевода утверждения (4) были предложены два варианта (4.2) и (4.3) и при этом верно (4.2) $\leftrightarrow$ (4.3), то приемлемость одного варианта влечет приемлемость другого, и наоборот.

Другой вопрос, что в некоторых случаях смысл исходного высказывания неясен, вследствие чего могут предлагаться неэквивалентные варианты переводов на язык логики предикатов. Например, мы легко справимся с переводом высказывания

(5) *Никто не знает всего*,

но не с близким ему по смыслу

(6) *Никто не знает всё до конца*.

Действительно, в качестве перевода (5) напрашивается

(5.1) $\neg\exists x\forall y(З(x, y))$

(Не существует объекта x, который знает любой объект y.)

Но что означает «знать всё до конца»? Поскольку все наши рассуждения (как мы условились) «привязаны» к некоторому универсуму объектов и поскольку мы можем представлять себе объекты универсума выстроенными в ряд, то это может означать, что некто знает все объекты универсума – от первого до последнего, от начала универсума до его конца (например, знать ответы на все вопросы к экзамену). В таком случае переводом (6) будет высказывание (5.1). Но с тем же основанием можно считать, что смысл «знать до конца» заключается в том, что знание об объекте может иметь степени. Например, экзаменаторы говорят, что «студент слабо знает предмет» или что «студент продемонстрировал хорошее знание вопроса» и т.п. При таком понимании «знать до конца» означает полное знание объекта (например, знать каждый экзаменационный вопрос на «отлично»). В этом случае отношение «знает» понимается не как двухместное, а как трехместное: x знает y до z (или x знает y на z – предлоги здесь не существенны). Пусть, для определенности, знания объекта оцениваются по 5-бальной шкале – от полного незнания (1), до полного понимания сути дела (5). Тогда переводом (6) будет

(6.1) $\neg\exists x\forall y(З(x, y, 5)$.

Высказывания (5.1) и (6.1) не эквивалентны. Действительно, одно дело, когда ни один из сдающих экзамены студентов не знает ответы на все вопросы, и другое – когда ни один из студентов не знает все вопросы «на пять». Если никто не знает всё на «отлично», то отсюда не следует, что никто не знает всё хотя бы на «удовлетворительно».

Как видим, логика предикатов позволяет различать тонкие оттенки смысла утверждений естественного языка. Вместе с тем, при логическом переводе теряется эмоциональное отношение говорящего к предмету обсуждения (конечно, высказывание (5) не просто констатирует факт, но и выражает эмоциональное к нему отношение).

Уяснив в первом приближении условия истинности и ложности формул логики предикатов, зададимся вопросом: существуют ли в ней законы, противоречия и фактуальные высказывания, есть ли здесь отношение логического следования? Да, всё это существует, но понимание этих категорий усложняется. Исследовать семантические характеристики формулы A не так то просто. Не можем же мы перебрать бесконечный класс всевозможных универсумов и проверить все варианты определений входящих в A отношений.

Существует другой, более удобный на практике способ установления логических законов и наличия отношения логического следования. Подобно тому, как в логике высказываний вместо построения таблиц истинности можно было воспользоваться правилами вывода, так и в логике предикатов вместо конструирования и проверки различных отношений между объектами универсумов можно применять правила вывода. Однако в логике высказываний семантика была проще синтаксиса. Согласитесь, что в ней легче было построить таблицу истинности, чем осуществить требуемый вывод. В логике предикатов дело обстоит прямо противоположным образом. Синтаксис здесь проще семантики. Поэтому в заключительном параграфе данной главы мы предъявим полную систему правил, позволяющую вывести любой логический закон или в каждом случае установить наличие логического следования между высказываниями чисто синтаксическими средствами.

§5. Определение понятий

С понятиями можно осуществлять различного рода операции, самой известной из которых является операция определения. Фактически, мы уже много раз применяли эту операцию по ходу изложения. Различия между высказываниями и понятиями проявляются в допустимых способах обращения с ними.

Уже указывалось, что истинностная оценка осмыслена в случае высказываний и бессмысленна в случае понятий. Зато понятия можно определять и проводить с ними другие операции (о которых речь впереди), которые неприменимы для высказываний.

Рассмотрение операций с понятиями начнем с операции определения. *Определить понятие — это значит указать его денотат*. Сказанное нуждается в уточнении. Прежде всего, понятия выражают в языке свойства или отношения. Простейший способ определения понятий состоит *в перечислении всех тех объектов, которые обладают данным свойством или находятся в данном отношении.*

Например, определить понятие числа, меньшего 10 на универсуме целых положительных чисел легко. Денотатом свойства ($x < 10$) на этом универсуме будет множество $\{1, 2, 3, ..., 9\}$. Или возьмём понятие «Студенты первого курса философского факультета ГУГН 2001-2002 учебного года» (в логической форме *Студент первого курса философского факультета ГУГН 2001-2002 учебного года(x)*). Определение этого понятия даётся предъявлением соответствующего списка.

Существует иной путь определения понятий, когда указание на денотат *осуществляется посредством сведения определяемого понятия к другим понятиям, денотаты которых уже известны*. Этот путь наиболее широко используется на практике. Когда мы даём определение понятию «дромедар» посредством указания, что *дромедар — это одногорбый верблюд*, то имело место сведение определяемого понятия к понятиям «верблюд» и «одногорбый». Аналогичным образом, понятие *пневмония* определяется через словосочетание *острое воспаление легких*, что сводит определяемое понятие «пневмония» к понятиям «легкие» и «острое воспаление». Количество примером вы без труда умножите самостоятельно.

Рассматриваемый вид определений имеет следующую форму.

(*) **Определяемое понятие** $\leftrightarrow_{Df}$ **Определяющие понятия**

Здесь символ «$\leftrightarrow_{Df}$» означает *эквивалентно по определению.*

Рассмотрим еще одно определение данной формы.

Брудерация — выращивание цыплят с помощью брудера.

Здесь тоже имеет место сведение определяемого понятия к определяющим, однако для человека, несведущего в птицеводстве, останется непонятным, о каких объектах идет речь. Очевидно, ему по-прежнему будет неясно, что такой «брудер». Оказывается, *Брудер – специальный отопительный прибор для выращивания цыплят, выведенных в инкубаторе.*

Если все еще остаются неясности, может потребоваться еще одно определение.

Инкубатор – аппарат для искусственного вывода птенцов из яиц (без наседок).

Теперь, мы надеемся, для каждого всё более или менее ясно. (Отметим, что в определениях в естественном языке вместо знака $\leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$ используется обычное тире.)

Данный пример показывает, что уяснение неизвестного понятия может потребовать многократного его сведения к другим понятиям через серию определений формы (*), пока дело не дойдет до известных понятий, уже не нуждающихся в определениях. Правда, можно притворяться, что вы не знаете, кого называют птенцом и что такое яйцо. Конечно, с точки зрения биологии эти понятия нуждаются в уточнении. Но эти уточнения не имеют отношения к вопросу о том, что такое инкубатор. Ведь в противном случае любой вопрос об определении можно завести в тупик, до бесконечности требуя всё новых и новых сведений. Другое дело, если понятия из определяющей части (расположенной справа от знака $\leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$) действительно вам неизвестны. Тут требование нового определения становится законным.

Если понятие имеет вид $R(x_1, \ldots, x_n)$, то можно уточнить форму (*).

(**) $\quad \mathbf{R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow_{Df} A(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$

Здесь $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – формула, которая не должна содержать других свободных переменных, кроме $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Приведем примеры определений формы (**). Вначале дадим определение понятию «x>y» («x больше y»), заданному на универсуме целых положительных чисел N^+.

$$(x > y) \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} (\exists z(x - z = y))$$

Очевидно, что здесь понятие «больше» сводится посредством определения к понятиям «равно» и «вычитание», которые предполагаются известными. Обратите внимание: в определяющей части (справа от знака $\leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$) содержатся в точности те же самые свободные переменные, что и в определяемой части (слева от знака $\leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$).

Дадим определение понятию «цвет радуги».

Цвет радуги(x) $\leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$ (*Красный (x)* $\vee$ *Оранжевый(x)* $\vee$ *Жёлтый(x)* $\vee$ *Зелёный(x)* $\vee$ *Голубой(x)* $\vee$ *Синий(x)* $\vee$ *Фиолетовый(x)*)

Разберем следующее определение понятия «наименьшее число».

Наименьшее число(x) $\leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$ $\forall y(x \neq y \to y > x)$

(Здесь понятие $x \neq y$ можно ввести следующим простым определением:

$$x \neq y \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \neg(x = y).)$$

Действительно, x будет наименьшим числом, если для любого другого (отличного от x) числа y выполняется неравенство $y > x$ (т.е. любое другое число больше x).

На этом примере можно показать, что *результат определения, т.е. денотат определяемого понятия, зависит от универсума рассуждений.* В универсуме положительных целых чисел N^+ денотат понятия *Наименьшее число*(x) является непустой совокупностью {1}. Однако это же понятие пусто на универсуме отрицательных целых чисел (среди которых, как известно, нет наименьшего).

Попробуем нарушить требование о том, чтобы справа от $\leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$ не содержалось свободных переменных, отсутствующих слева.

Наименьшее число(x) $\leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$ $(x \neq y \to y > x)$

Вместо неизвестных переменных x и y можно подставлять любые значения из универсума объектов. Пусть, например, $x = 5$ и $y = 10$. Поскольку $5 \neq 10$ и $10 > 5$, получаем, что 5 – наименьшее число, к чему мы отнюдь не стремились. С другой стороны, согласно первому определению, для того чтобы быть наименьшим, 5 должно быть меньше любого другого числа. Но, например, $5 > 4$, так что по первому определению 5 не является наименьшим, что нам и требовалось. Таким образом, отбрасывание квантора общности привело к появлению «незаконной» свободной переменной и «порче» определения.

Количество свободных переменных справа от знака $\leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$ может быть меньше, чем число свободных переменных слева от этого знака. В качестве примера определим свойство Q(x) через свойство P(y) следующим образом.

$$Q(x) \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \forall y P(y)$$

Здесь свободные переменные справа от $\leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$ вообще отсутствуют. Но такое определение не бессмысленно. Его суть в том, что если всякий объект универсума обладает свойством P, то в соответствии с определением, всякий объект универсума обладает и свойством Q, т.е. если $\forall y P(y)$ истинно, то и $\forall x Q(x)$ будет истинно. Но если высказывание $\forall y P(y)$ ложно, даже если при этом для некоторого объекта *c* высказывание P(*c*) истинно (тем самым истинно $\exists x P(x)$), высказывание Q(*c*) будет ложно, и более того, утверждение $\exists x Q(x)$ (не говоря уже о $\forall x Q(x)$) будет ложным. Иными словами, если свойство P *универсально* (т.е. совпадает с универсумом), то универсально и свойство Q. Если же P не универсально, то Q пусто. (Разберите самостоятельно смысл определения вида $Q(x) \leftrightarrow_{Df} \exists y P(y)$).

§6. Определение объектов

Выше была разобрана операция определения применительно к свойствам и отношениям, т.е. к понятиям. Но, с позиции логики, мир членится не только на свойства и отношения. Столь же фундаментальным образованием в схеме членения универсума являются индивидуальные объекты. Применительно к индивидам также возникает вопрос о способах их определения.

Простейший способ определить индивидуальный объект дают так называемые *остенсивные* определения, суть которых состоит в простом указании на определяемый объект (например, при помощи пальца) с последующим произнесением имени, присваиваемого объекту.

Именно с помощью остенсивных определений маленьких детей учат обозначать различного рода вещи при помощи слов. Но познавательная роль остенсивных определений на самом деле гораздо шире. Зачастую в эмпирических или описательных науках нет лучшего способа знакомства с объектом, чем его остенсивное определение, с успехом заменяющее длинные и мало вразумительные описания. Так, в медицине при обучению распознаванию симптомов болезней большего эффекта в обучении можно добиться, если указать типичные примеры желтухи, цианоза, акромегалии или олигофрении, чем давать этим явлениям словесные определения.

Правда, за пределами конкретных вещей и явлений значение остенсивных определений резко падает. Ни один абстрактный объект не может быть определен таким образом. Поэтому ошибался древне греческий философ Кратил, который считал вещи настолько изменчивыми, что предлагал не давать им постоянные имена, а только указывать на них пальцем. На недоступные восприятию объекты пальцем не укажешь — здесь нужны иные методы определения.

Для того, чтобы определить абстрактный объект, необходимо прежде удостовериться, что он существует. Ведь если в рамках данной теории этот объект не существует или он вообще противоречив, то просто не о чем говорить и нечему давать определение. Далее, если искомый объект существует, необходимо убедиться в его единственности. В противном случае, т.е. если мы имеем дело с несколькими объектами, целесообразнее определить понятие о данном ряде объектов, а не пытаться определять только один из них.

Условие существования и единственности означает следующее. Допустим, верно $\exists x A(x)$ (тем самым объект x, обладающий свойством A, существует). Теперь надо попытаться доказать, что

(!) $\forall x \forall y((A(x) \,\&\, A(y)) \rightarrow (x = y))$.

Действительно, смысл утверждения (!) в том, что любые объекты x и y, если оба они удовлетворяют условию A, то они оказываются равны между собой. Но это и означает, что имеется только один объект, удовлетворяющий условию A. При наличии доказательства истинности высказывания о единственности (!) и высказывания о существовании $\exists x A(x)$ в логике используют более краткую запись: $\exists ! x A(x)$. Иными словами, мы принимаем следующее определение формулы вида $\exists ! x A(x)$.

$$\exists ! x A(x) \leftrightarrow_{Df} \exists x A(x) \,\&\, \forall x \forall y((A(x) \,\&\, A(y)) \rightarrow (x = y))$$

В результате определён новый квантор «$\exists !$», который прочитывается как «Существует и при том единственный». Если доказано, что $\exists ! x A(x)$, то тогда мы можем ввести в наш язык новое имя того самого единственного объекта, который существует и один среди всех объектов удовлетворяет условию A.

Вернемся к определению понятия «Наименьшее число», определенному на универсуме положительных целых чисел N^+.

Наименьшее число(x) $\leftrightarrow_{Df} \forall y(x \neq y \rightarrow y > x)$

Каждый, знакомый со школьной арифметикой, согласится, что в рассматриваемом универсуме такое наименьшее число существует. Будет ли оно единственным? Очевидно, будет, поскольку в противном случае имели бы два различных неотрицательных целых числа c и d таких, что (согласно определению) верно $\forall y(c \neq y \rightarrow y > c)$ и верно $\forall y(d \neq y \rightarrow y > d)$. Но раз эти утверждения верны для всех чисел универсума, то они верны и для d и c. Поэтому имеем: $c \neq d \rightarrow d > c$. Т.к. $c \neq d$ по предположению, по modus ponens получаем: $d > c$. С другой стороны, должно быть истинно $d \neq c \rightarrow c > d$. Т.к. c и d неравны, вновь по modus ponens получаем: $c > d$. Однако, согласно определению понятия $(x > y)$ (все в том же универсуме положительных целых чисел)

$$(x > y) \leftrightarrow_{Df} (\exists z(x = y + z))$$

имеем, что из $x > y$ следует $\neg(y > x)$. Поэтому не может быть, чтобы выполнялось и $c > d$, и $d > c$, но именно к такому выводу мы пришли раньше. Следовательно, предположение о существовании двух различных наименьших чисел привело к противоречию. Отсюда вывод: наименьшее число в рассматриваемом универсуме единственное.

Итак, верно $\exists!x$*Наименьшее число*(x). Теперь мы имеем право определить конкретный объект, являющийся наименьшим числом в универсуме положительных целых чисел N^+. В соответствии с традицией, присвоим этому объекту имя «1». В результате имеем истинное (в универсуме N^+) высказывание $\forall y(1 \neq y \rightarrow y > 1)$.

Располагая каким-либо именем, всегда можно ввести ещё одно имя того же самого индивида. Делается это при помощи знака $=_{Df}$, означающего «равно по определению». Например, применяя операцию сложения к 1, получим имя нового числа: $1 + 1$. Как коротко обозначить это число? В арабской символике принимают $1 + 1 =_{Df} 2$. В римской нотации наименьшее целое положительное число обозначается через I, а $\mathrm{I} + \mathrm{I} =_{Df} \mathrm{II}$. Клички также присваиваются этим способом. Так, подыскивая В.И.Ульянову партийную кличку, выбрали новое имя «Ленин»: В.И.Ульянов $=_{Df}$ Ленин.

§7. Номинальные и реальные определения

Традиционные логики думали, что определения призваны вскрывать так называемую *сущность* слов. В этой связи тратились колоссальные усилия на поиск определений, способных ухватить эту самую сущность. Об этом уже шла речь в начале книги. В этих претензиях отсутствует понимание того, что операция определения имеет по преимуществу служебный характер, подчиненный задачам и целям теоретического исследования. Игнорируя этот вывод современной логической науки, многие научные работники продолжают по старинке заниматься поиском скрытой сущности, якобы заключенной в словах и подлежащей раскрытию посредством удачного определения.

Имеется и противоположная позиция, согласно которой определение должно быть всего лишь формально правильным, но не должно претендовать на выделение существенных сторон в определяемом понятии. С такой точки зрения, понятия — это всего лишь слова, которые можно определить так, как это нам хочется. Например, такое определение как «Человек — это животное с мягкой мочкой уха» формально выделяет класс людей среди прочих объектов мира и потому ничуть не хуже, а, быть может, и лучше определений, направленных на поиск мнимой сущности понятия человек.

Различие между двумя описанными позициями хорошо иллюстрирует следующее замечание. Поставим вопрос: как нужно читать определения? Согласно первой позиции, читать определения необходимо слева направо: сначала (слева) скрытая в понятии сущность, подлежащая определению, затем (справа) — само определение, раскрывающее сущность. Вторая позиция предполагает чтение определений справа налево: сначала (справа) читаем определяющую и, как правило, длинную часть, затем (слева) смотрим, какое более короткое слово будет служить сокращением длинной части.

С такой точки зрения, определения понятий являются всего лишь *сокращениями* чрезмерно длинных выражений, которыми неудобно (в силу этого обстоятельства) пользоваться на практике. Действительно, рассуждают сторонники рассматриваемой позиции, разве в определении «Квадрат — это четырехугольник, у которого все стороны равны, а углы прямые» содержится что-либо новое, если нам уже известно, что такое четырехугольник, прямой угол и равные стороны? Просто мы вводим особое словечко «квадрат» для сокращения соответствующего длинного выражения. Но введение нового слова не прибавляет нам принципиально новых знаний.

Сторонники первой позиции считают операцию определения реально выявляющей таинственную сущность понятий. С их точки зрения, мы должны поэтому давать *реальные* определения, т.е. определения, выявляющие реальные сущности. Противоположная сторона настаивает на том, что еще не определенные слова — это своего рода пустые оболочки, которые можно наполнить любым содержанием (вспомним поговорку: «Назови хоть горшком, только в печь не ставь»). С такой точки зрения, операция определения касается только произвольного выбора символа для обозначения какого-либо денотата, и поэтому определения носят *номинальный* характер.

В произведении Л.Кэрролла «Алиса в Зазеркалье» персонаж по имени Шалтай-Болтай как-то необычно употребил слово «слава».

> «— Я не понимаю, при чем здесь «слава»? — спросила Алиса...
>
> Шалтай-Болтай презрительно улыбнулся.
>
> — И не поймёшь, пока я тебе не объясню, — ответил он.— Я хотел сказать: «Разъяснил, как по полкам разложил!»
>
> — Но «слава» совсем не значит: «разъяснил, как по полкам разложил!» — возразила Алиса.
>
> — Когда *я* беру слово, оно означает то, что я хочу, не больше и не меньше,— сказал Шалтай презрительно.
>
> — Вопрос в том, подчинится ли оно вам,— сказала Алиса.
>
> — Вопрос в том, кто из нас здесь хозяин, — сказалШалтай-Болтай. — Вот в чём вопрос!»

Между прочим, сам Л.Кэрролл, который был не только писателем, но и логиком, занимал (как и все логики наших дней, за исключением шарлатанов и невежд) позицию Шалтая-Болтая. Любой пишущий человек вправе, предупредив читателя заранее, под словом «черное» понимать «белое» и наоборот. Впрочем, как верно заметил комментатор Кэрролла М.Гарднер, «Если мы хотим быть правильно понятыми, то на нас лежит некий моральный долг избегать практики Шалтая, который придавал собственные значения общеупотребительным словам». Но если в действительности у многих общеупотребительных слов нет столь же общеупотребительных значений, то как тогда быть?

В науке в большинстве типичных случаев употребления операции определения используются именно номинальные определения. Сначала берётся некоторая комбинация известных понятий (которая записывается справа от знака $\leftrightarrow_{Df}$), а затем ей присваивается *произвольное* сокращённое символическое обозначение (размещаемое слева от знака $\leftrightarrow_{Df}$). В математике, где регулярно используются определения, встречаются слова «класс», «множество», «группа», «кольцо», «поле», «фильтр», «идеал» и многие другие, используемые в значениях, ничего общего не имеющих с обыденным смыслом этих слов. Философское понятие «материя» ничего общего не имеет с материей для пошива платьев или брюк. За границами науки номинальные определения также встречаются сплошь и рядом. В уголовно-криминальной среде «крыша» — это не средство защиты от дождя. И т.д.

Ничего удивительного тут нет. Если вспомнить о символической природе языка, то так и должно быть. Есть лишь одно исключение, когда обоснованно применяются не номинальные, т.е. вводимые по конвенции определения, а именно реальные определения. Только они направлены не на выявление таинственной сущности понятия, а устанавливают, как *реально используется некоторое слово или словосочетание в том или ином языке*. Такого рода определения помещаются в *словари*. Вы тоже проделываете словарную работу, когда пытаетесь определить, как используется некоторый знак носителями языка. Лучше сказать, большинством носителей языка, ибо всегда могут быть выявлены особые случаи словоупотребления, выпадающие из общепринятой нормы. Уже такие справочные издания, как энциклопедии, не содержат, как правило, реальных определений. Поскольку статьи в энциклопедиях имеют достаточно большой объём, в них практически неизбежно отражается своеобразие позиции автора статьи, что придаёт его определениям номинальность.

Не хотелось бы, чтобы нас поняли в том смысле, что вопрос о существенном в вещах и явлениях вообще не стоит. В принципе, суть вещей призвана раскрывать *теория* соответствующей области явлений. В теориях, конечно, используются определения. Но это не означает, что серьёзную теорию можно заменить несколькими ловко составленными определениями. Когда в теории новое содержание посредством определения связывается со словом, превращая это слово в понятие, тогда само новое содержание обязано быть в каком-либо смысле значимым и существенным. Мы не согласны с позицией, считающей определения всего лишь сокращениями. Действительно, давая определение слову «квадрат», мы не только стремимся избежать длиннот в языковых выражениях (хотя краткость речи – сама по себе благо). Еще более существенно то, что данный род фигур играет важную роль в геометрии. Если бы этот род фигур не имел такой роли, то не было бы необходимости о нём часто упоминать, и тогда не возникло бы желание ввести сокращение в виде слова «квадрат».

Таким образом, теоретически мы вольны со словами (особенно с малоиспользуемыми или новыми) связывать какое угодно содержание, не опасаясь нарушить сложившиеся и важные для коммуникации языковые стереотипы. Но само данное содержание должно быть существенным в том или ином отношении, не претендуя при этом на абсолютную значимость. То есть этим словам можно сопоставлять и иные существеные значения, а не только какое-либо одно, раз и навсегда принятое. Вместе с тем, «доля» номинальности или реальности в определениях может варьироваться. Слову, впервые вводимому в язык, можно приписать любой денотат посредством определения. Однако, если некоторый термин имеет утвердившееся в данном сообществе содержание, то с прагматической точки зрения было бы опрометчиво использовать его вопреки сложившейся языковой норме.

Например, возражение первому платоновскому определению человека основывалось на том, что реально ощипанного цыпленка никто не назовёт человеком. Поэтому это определение было слишком широким. Его требовалось сузить, чтобы избежать столкновения со здравым смыслом (что и было проделано). Но если бы вместо понятия «человек» определялся некий нейтральный термин, то зачисление в один класс всех двуногих бесперых, в том числе людей и ощипанных цыплят, уже не вызвало бы решительных возражений: кто бы нам запретил обозначить этот класс одним словом? В таком случае возобладал бы номинальный аспект определения.

Приведенный пример касался чересчур широкого определения. Противоположная ситуация возникает тогда, когда определение оказывается слишком узким в противоречие с устоявшимся взглядом на содержание определяемого понятия. Так, определение «Больной – это человек, на которого заведена история болезни», безусловно, слишком узкое и бюрократическое.

Определения могут быть слишком широкими и узкими одновременно. Например, определение «Душевно больной – это человек, одержимый бесом» одновременно слишком широкое (поскольку некоторые одержимые бесом, безусловно, душевно здоровы) и слишком узкое (поскольку некоторые психические болезни связаны с травмами головного мозга и бесы тут ни при чем).

§8. Явные и неявные определения

До сих пор мы имели дело с так называемыми явными определениями. Определение называется явным, если выполнены два условия:

1. В определении четко выделены определяемая и определяющая части;

2. В определяющей части не встречается определяемый термин.

В явных определениях определяемая и определяющая части связываются либо знаком «эквивалентно по определению» $\leftrightarrow_{Df}$, либо знаком «равно по определению» $=_{Df}$. В естественном языке в явных определениях вместо знаков $\leftrightarrow_{Df}$ и $=_{Df}$, имеющих точный логический смысл, используются знаки, их заменяющие: тире, слова "это", "есть" и т.п.

Распространенной ошибкой, нарушающей условие 2 явных определений, является ошибка «*порочного круга*», когда определяемый термин определяется через самого себя. Например, бессмысленно рассматривать выражение $b =_{Df} b$ в качестве правильного определения объекта b, хотя истинность равенства $b = b$ не вызывает сомнений. Аналогичным образом, определение $P(x) \leftrightarrow_{Df} P(x)$ нелепо, но эквивалентность $P(x) \leftrightarrow P(x)$ есть частный случай закона тождества.

Конечно, на практике «порочный круг» редко встречается в столь очевидно нелепой форме. Чаще эта логическая ошибка возникает в виде цепочки определений $П_1 \leftrightarrow_{Df} П_2$, $П_2 \leftrightarrow_{Df} П_3$, ..., $П_{n-1} \leftrightarrow_{Df} П_n$, $П_n \leftrightarrow_{Df} П_1$. Иными словами, определяя понятие $П_1$ через $П_2$, $П_2$ – через $П_3$ и т.д., вплоть до определения понятия $П_{n-1}$ через $П_n$, ошибочно определять $П_n$ через $П_1$, поскольку опосредованным образом само $П_1$ было определено через $П_n$.

В книге Станислава Лема «Звездные дневники Ийона Тихого» рассказывается, как главный герой безуспешно пытался понять, что такое сепульки.

«Все-таки я пошел к Тарантоге, чтобы прочесть о сепульках. Нашел следующие
краткие сведения:

"СЕПУЛЬКИ – важный элемент цивилизации ардритов (см.) с планеты
Энтеропия (см.). См. сепулькарии".

Я последовал этому совету и прочел:

"СЕПУЛЬКАРИИ – устройства для сепуления (см.)".

Я поискал "сепуление"; там значилось:

"СЕПУЛЕНИЕ – занятие ардритов (см.) с планеты Энтеропия (см.). См. СЕПУЛЬКИ".

Круг замкнулся, больше искать было негде».

Еще одним требованием, предъявляемым к явным определениям, является *ясность*. Казалось бы, само собой разумеется, что определение должно быть ясным и понятным. Однако в действительности требовать это уместно лишь в случае явных определений (в неявных, как мы увидим, требование ясности в общем случае недостижимо).

Человеку, несведущему в той или иной области науки, многие относящиеся к ней определения будут не ясны и не понятны. Здесь источник неясности очевиден — это недостаток знаний. Принципиально иного рода неясность возникает тогда, когда непонятность определения связана с его логической несуразностью (в таких случаях именно знания нужны для того, чтобы не принимать эти определения за проявление мудрости). В определениях следует избегать неясности именно в этом последнем смысле.

Поставщиком примеров неясных явных определений является, например, спекулятивная философия. В философском словаре читаем: «Субстанция — объективная реальность в аспекте внутреннего единства всех форм ее саморазвития, всего многообразия явлений природы и истории, включая человека и его сознание, и потому фундаментальная категория научного познания, теоретического отражения конкретного». Читая это предложение, понимаешь, что к числу достоинств определения, помимо ясности, следует отнести и краткость.

Явные определения наилучшим образом выполняют функцию объяснения того, какие объекты мыслятся в определяемом понятии или что представляет из себя определяемый объект. Однако далеко не всегда легко найти явную форму определения. В этих ситуациях прибегают к неявным определениям, в которых может отсутствовать четко выраженная определяющая часть или определяемый термин встречается в определяющей части.

Последняя фраза может вызвать недоумение: ведь в этом случае возникает «порочный круг». На самом деле в определенных ситуациях этой логической ошибки удаётся избежать. Предположим, что дано число 0 и операция прибавления 1. Тогда можно так определить понятие «Натуральное число(x)».

1. Натуральное число(0) (т.е. 0, по определению, является натуральным числом).
2. Натуральное число(n) $\rightarrow$ Натуральное число(n+1) (т.е. если уже известно, что n — натуральное число, то число n+1 также, по определению, является натуральным).
3. Никакие иные объекты, кроме полученных в соответствии с пунктами 1 и 2, натуральными числами не являются.

Пункты 1-3 неявно определяют понятие Натуральное число(x). Неявно, потому что мы не представили выражения вида (**) с формулой A(x) в правой части, в которую определяемое понятие не входит. У нас же, напротив, определяемое свойство «натуральное число» встречается в определяющей части. Но это не приводит к возникновению «порочного круга», поскольку мы даём конкретную процедуру построения множества натуральных чисел начиная с числа 0. В том, чтобы (еще не зная, какие объекты будут отнесены к натуральным числам) считать 0 натуральным числом, никакого круга нет. Затем, в соответствии с пунктом 2, заключаем, что 0+1 (т.е. 1) – также натуральное число. И вновь круга нет, т.к. мы при этом не ссылаемся на всё множество натуральных чисел, а лишь делаем ссылку на уже известный факт о том, что 0 является натуральным числом. Продолжая эту процедуру, в пределе получим искомое множество натуральных чисел.

Мы уже дважды сталкивались с неявными определениями такого рода, когда определяли понятие формулы языков логики высказываний и логики предикатов. Этот вид неявных определений называют *индуктивными* определениями[10]. Вторым видом неявных определений являются *аксиоматические* определения понятий, с которыми мы познакомимся в следующей части.

На практике часто приходится сталкиваться с третьим видом неявными определениями – с так называемыми *контекстуальными* определениями, в которых нельзя (в отличие от предыдущих случаев) строго указать, где начинается и кончается определение. С ситуацией определения через контекст сталкивается, например, изучающий иностранный язык, когда он читает текст без словаря и встречает в нем незнакомое слово. В некоторых случаях знание остальных слов и то, каким образом употребляется неизвестное слово в сочетаниях с известными, оказывается достаточным для того, чтобы перевести незнакомое слово. Но точно определить, каков кусок текста, достаточный для определения этого слова, бывает трудно или даже практически невозможно. Ведь если взять больший кусок текста, может оказаться, что перевод незнакомого слова был ошибочен и нужно принимать другую гипотезу о его значении.

Заметим, что предыдущий абзац можно рассматривать как контекстуальное определение самого понятия «контекст». Кому-то этот контекст для «контекста» может показаться достаточным, а кому-то – слишком бедным для понимания данного слова. И здесь нет «правых» и «ошибающихся» – размытость присуща этому виду неявных определений. Поэтому контекстуальные определения не годятся для введения точных понятий.

§9. Операции деления и классификации

Вначале скажем об операция *деления* понятий. Операция деления проводится с объёмами понятий, хотя для краткости говорят о делении понятий. Знакомство с этой операцией начнем с примеров. Простейшим примером деления является *дихотомия*, делящая объем понятия на две части по принципу обладания или не обладания некоторым признаком, в качестве которого может выступать свойство или отношение.

Скажем, объем понятия «Человек(x)» можно дихотомически поделить на две части: императоров и тех людей, кто никогда не был императором. В результате исходное понятие разделится на два новых: понятие «Император(x)» и противоположное ему понятие, для которого нет общепринятого слова – обозначим это понятие через «¬Император(x)».

Деление свойства «Человек» на «Мужчин» и «Женщин» уже не будет дихотомическим, поскольку свойство «Быть женщиной» логически не обязательно сводится в к свойству «Быть не мужчиной». Но свойство «Человек» можно дихотомически поделить на «Мужчин» и «¬Мужчин» (аналогичным образом, на «Женщин» и «¬Женщин»).

Результаты деления называются *членами деления*. В случае дихотомии членов деления всегда получается два. Но объем понятия можно делить на какое угодно количество частей. Например, объем понятия «Дерево(x)», т.е. свойство «Быть деревом», разделится на достаточно длинный ряд членов деления, представляющих различные виды пород дерева: «Осина», «Дуб», «Сосна» и т.д.

Однако не всякое членение объема исходного понятия считают логически правильным делением. Попробуем, например, разделить свойство «Больной» по видам болезней: «Больной пневмонией», «Больной гастритом» и т.д. Но между этим делением и предыдущим есть существенная разница: высказывание ¬∃x(Осина(x) & Дуб(x)) является истинным, т.е. ни одно дерево не является осиной и дубом одновременно. Но больной вполне может одновременно болеть как пневмонией, так и гастритом, т.е. утверждать ¬∃x(Больной пневмонией(x) & Больной гастритом(x)) уже нельзя. Тем самым мы не сумели разделить объем понятия «Больной(x)» – процедура деления как бы не доведена до конца.

Не имеет смысла считать деление правильным и в том случае, если сумма получившихся членов деления оказывается меньше объема исходного понятия. Если, например, мы разделим людей на имеющих начальное, среднее или высшее образование, то тем самым упустим из виду еще имеющихся на планете неграмотных людей и детей младшего возраста.

Наконец, деление не будет правильным, если один из получившихся членов деления пуст. Например, деление людей на смертных и бессмертных нелепо, поскольку нет ни одного примера бессмертного человека.

Таким образом, операция деления объема понятия П состоит в разбиении этого объема на части $П_1$, ..., $П_n$ таким образом, что выполняются следующие условия.

1. Объединение частей П1, ..., Пn дает П;
2. Части П1, ..., Пn попарно не пересекаются между собой (это означает, что любые две части не имеют общих элементов);
3. Ни одна из частей не является пустой.

Нарушение любого из перечисленных условий приводит к логически некорректным результатам. К сожалению, на практике не всегда деление осуществляется в соответствии с правилами логики. Например, некоторые политологи делят политических лидеров на лидеров-знаменосцев, лидеров-слуг, лидеров-торговцев и лидеров-пожарных. Но если спросить, к какому из перечисленных видов лидеров относятся, например, Н.С.Хрущев или М.Тэтчер, то последует ответ типа: «Хрущев относится к лидерам нескольких видов» или «В М.Тэтчер уживались все четыре вида лидеров». Тем самым выделить отличные друг от друга виды лидерства не удалось: логическая ошибка здесь заключается в нарушении требования 2. Кроме того, почему бы этот ряд членов деления не пополнить и не ввести лидеров-врачевателей или что-нибудь подобное. Иными словами, есть подозрение, что в рассматриваемом ошибочном делении объема понятия «Политический лидер(х)» не соблюдается и требование 1.

Правильное деление должно выделять в особый член деления даже такой подкласс исходного объёма, который содержит лишь один элемент. Например, если целые числа делят на положительные и отрицательные по признаку быть больше или меньше нуля, то это ошибочное деление, упустившее случай нуля (ведь нуль не является ни положительным, ни отрицательным числом). При правильном делении членами деления будут классы $\{1, 2, ..., n, ...\}$, $\{-1, -2, ..., -n, ...\}$ и одноэлементный класс $\{0\}$, которые в сумме составят множество всех целых чисел. Такие одноэлементные классы появляются нередко. Например, в биологии утконос – единственный вид семейства утконосовые.

Еще одна распространенная логическая ошибка при проведении операции деления заключается в непонимании разницы между *логическим делением* объёма понятия и расчленением элементов объёма (физическом или мысленном) на *составные части*. В традиционной логике среди прочих выделяются так называемые «собирательные» понятия. В одном из учебников по традиционной логике читаем: «Содержание собирательного понятия нельзя отнести к каждому отдельному элементу, входящему в объём этого понятия. Например, об одном дереве мы не можем сказать, что это лес; один корабль не является флотом, а один пионер не составляет пионерский отряд». Таким образом, у процитированного автора получилось, что объём понятия «лес» состоит из отдельных деревьев, объём понятия «флот» – из отдельных кораблей, а объём понятия «пионерский отряд» – из отдельных пионеров. Это ошибочно, поскольку объём понятия «лес» будет составлен не из отдельных деревьев, а из групп деревьев (таких, например, как Шервудский лес, где разбойничал Робин Гуд, или Беловежская пуща). Соответственно, в объем понятия «флот» в качестве элементов войдут определенные группы кораблей (например, Черноморский флот, Северный флот и т.д.).

Объём понятия «созвездие» состоит не из отдельных звёзд (которые являются частями созвездий, причём зачастую физически между собой не связанными из-за колоссальной удалённости друг от друга – ведь в созвездие не обязательно попадают близко расположенные звёзды), а из конкретных созвездий (Рыбы, Стрельца, Большой медведицы и т.д.). Можно дихотомически разделить объём этого понятия, например, на созвездия Зодиака и остальные созвездия. Аналогичным образом, объем понятия «Летательный аппарат(x)» можно по основанию «соотношение с весом вытесненного воздуха» разделить на аппараты легче воздуха и аппараты тяжелее воздуха, по основанию «цель применения» – на военные, транспортные, учебно-тренировочные, спортивные и специального назначения. По другим основаниям (дальность полета, скорость полета, тип силовой установки) получим другие виды летательных аппаратов. Но, как не трудно понять, не являются видами летательных аппаратов ни крылья, ни хвосты, ни винты и не фюзеляжи. Все это – части самих летательных аппаратов.

Классификация тесно связана с делением. Операция классификации широко применяется в науке и практической деятельности врачей, инженеров, учителей и других специалистов. *Классификация* – это совокупность вложенных друг в друга делений. Иными словами, операция классификации сводится к некоторой последовательности операций деления объемов понятий.

В простой классификации формул исходным было, естественно, само понятие формулы. Затем его объём был дихотомически разбит на две части: выполнимые и не выполнимые формулы. Наконец, выполнимые формулы были разделены на законы и фактуальные выражения.

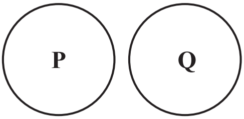
Проводимые в науке классификации могут быть очень сложны. Одной из наиболее впечатляющих классификаций является до сих пор незавершённая биологическая классификация живых организмов. В сфере права кодексы законов классифицируют соответствующие деяния. Так, уголовный кодекс РФ классифицирует все возможные преступления (именно все, поскольку деяния, не попавшие в эту классификацию, с юридической точки зрения преступлениями не являются). Операция классификации широко применяется в медицине. И т.д.

Новые факты могут потребовать пересмотра сложившихся классификаций. В любом случае классификация не будет выполнять свою систематизирующую роль, если при её проведении нарушаются правила деления объемов понятий. Поэтому следует различать логически правильные, но устаревшие классификации, и классификации, построенные с нарушением логических требований.

§10. Отношения между понятиями

Говоря об отношениях между понятиями, мы будем иметь в виду отношения между объемами двух понятий (рассмотрение отношений между объёмами трёх и более понятий резко усложнило бы ситуацию). Но для краткости упоминание об объеме будем иногда опускать. Прежде всего, понятия делятся на совместимые и несовместимые. Понятия называются *совместимыми*, если их объемы имеют хотя бы один общий элемент. В противном случае понятия *несовместимы*.

Примером совместимых понятий могут служить понятия «Простое число(x)» и «Чётное число(x)». Как известно, чётные числа делятся на 2, а простые числа делятся только на самих себя и на 1 (конечно, имеется в виду деление нацело). Число 2, разумеется, чётное. В то же время, оно делится только на самого себя и на 1, поэтому оно простое. Больше общих элементов в бесконечных множествах чётных и простых чисел нет.



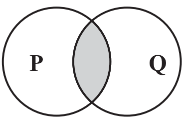
Примером несовместимых понятий являются понятия «Положительное число(x)» и «Отрицательное число(x)», поскольку не существует одновременно положительных и отрицательных чисел. Графически отношение несовместимости между объёмами понятий P и Q изображено на следующей схеме. Наглядно видно, что нет ни одного индивида, который бы входил как в объём понятия P, так и в объём понятия Q. Точнее эту ситуацию можно описать аналитически формулой $\neg(\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n(P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)))$, т.е., словесно, не существует n-ки индивидов, удовлетворяющей и отношению P, и отношению Q. Но это и есть точное определение несовместимости:

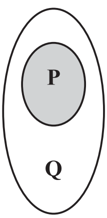
$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **несовместимо** с $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow_{Df}$ $\neg(\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n(P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)))$.

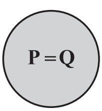
Совместимость тогда определяется как снятие отрицания с несовместимости:

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **совместимо** с $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow_{Df}$ $(\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n(P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)))$.

В этом случае существует n-ка индивидов, удовлетворяющей и отношению P, и отношению Q.







Выделяют три вида совместимости, как показано на следующей схеме. Для упрощения записей определений эти три вида будут точно определены только для свойств. В качестве небольшого упражнения обобщите эти определения на случай отношений произвольной местности. Во-первых, объемы совместимых понятий могут *перекрещиваться* между собой. $P(x)$ **перекрещивается** с $Q(x) \leftrightarrow_{Df} \exists x(P(x) \& Q(x)) \& \exists y(P(y) \& \neg Q(y)) \& \exists z(\neg P(z) \& Q(z))$. Смысл этого определения прост. В случае перекрещивающихся объёмов есть индивид, принадлежащий обоим объёмам одновременно, есть индивид, принадлежащий первому, но не второму объёму и есть индивид, не принадлежащий первому, но принадлежащий второму объёму.

Только что рассмотренные арифметические понятия «простое число» и «чётное число» являются перекрещивающимися.

Во-вторых, совместимые понятия могут находиться в отношении *включения*, когда объём одного понятия целиком содержится в объёме другого, но не наоборот. $P(x)$ **включается** в $Q(x)$ $\leftrightarrow_{Df}$ $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ & $\exists y(\neg P(y)$ & $Q(y))$. Например, объём понятия «Человек» включается в объём понятия «Животное», поскольку всякий человек – животное, но не наоборот, т.к. существуют животные, не являющиеся людьми.

В-третьих, совместимые понятия могут быть *равнозначными*. У равнозначных понятий объёмы совпадают. Этот вид отношения между парой объёмов легче всего описать формулой. $P(x)$ **равнозначно** $Q(x) \leftrightarrow_{Df} \forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$. Например, понятия «чётное число» и «число, делящееся на 2» равнозначны.

§11. Натуральное исчисление предикатов

Натуральное исчисление предикатов K_N получается, если взять все правила натурального исчисления высказываний и добавить к ним правила введения и удаления кванторов. Поскольку кванторов два, новых правила будет четыре.

Правила для кванторов

Введение всеобщности ($\forall$в)

$$\frac{\Gamma \vdash A(v)}{\Gamma \vdash \forall v A(v)}$$

Удаление всеобщности ($\forall$у)

$$\frac{\forall v A(v)}{A(t)}$$

Введение существования ($\exists$в)

$$\frac{A(t)}{\exists v A(v)}$$

Удаление существования ($\exists$у)

$$\frac{\exists v A(v)}{A(\alpha)}$$

Здесь v – это индивидная переменная языка логики предикатов, t – это терм (т.е. либо имя, либо индивидная переменная), α – какое-либо новое имя, не входящее в исходный перечень имён языка.

Определение вывода в логике предикатов, оставаясь по сути тем же самым, модифицируется в связи с использованием правила $\exists$у (об этом ниже). На применение кванторных правил накладывается ряд ограничений, которые мы объясним для каждого правила в отдельности.

I. *Правило введения квантора всеобщности* (∀в). Предположим, в выводе встретилась штопор-формула вида Г $\vdash$ A(v), причём в A(v) переменная v входит *свободно*, а в Г *нет* формул, в которые v входит не связанно. Тогда правило разрешает переход к штопор-формуле Г $\vdash$ ∀vA(v).

Почему в A(v) переменная v должна входить свободно? По той причине, что в противном случае A(v) содержит либо квантор ∃v, либо ∀v и выражение ∀vA(v) просто не будет формулой (из-за нарушения пункта 5 определения формулы).

Почему, далее, в Г не должно быть формул, содержащих не связанные вхождения v? Построим следующий вывод.

1. P(x) — доп.
2. P(x) — 1, р
3. P(x) $\vdash$ P(x) — 1-2, $\vdash$в

В P(x) переменная x не связанна. Попробуем применить ∀в к доказанной штопор-формуле P(x) $\vdash$ P(x). Получим

4. P(x) $\vdash$ ∀xP(x) – 3, ∀в?

Полученная штопор-формула утверждает, что из понятия о свойстве P(x) выводимо высказывание, что все предметы универсума обладают свойством P. Но это явная чушь. На универсуме людей есть, например, непустое свойство «Быть военнослужащим», но отсюда никак не следует, что верно высказывание «Все люди являются военнослужащими». Сбой произошёл на 4 шаге рассуждения из-за нарушения требования, чтобы в Г, роль которого играет P(x), x было связанно.

II. *Правило введения квантора существования* (∃в). Это прямое правило, на входе которого стоит формула вида A(t). Возможны два случая: либо t есть какая-то переменная v, либо t — какое-либо имя n (постоянное или временное).

В первом случае v должно быть свободно в A(v) по той же причине, что и для предыдущего правила: иначе ∃vA(v) просто не будет формулой.

Во втором случае имеем A(n). Формула ∃vA(v) получается из A(n) в два этапа. Сначала заменим некоторые (а, может быть, и все) вхождения имени n на *новую* переменную v, не содержащуюся в исходной формуле A(n). Ясно, что v будет свободна в получившейся формуле A(v). Затем на A(v) навесим квантор существования по переменной v, получив формулу ∃vA(v).

Почему n надо менять именно на новую переменную v, почему просто не потребовать, чтобы v была свободна в A(v)? Рассмотрим арифметическую формулу (x > 8). Заменим имя «8» на переменную x. Получим формулу (x > x). В этой формуле x содержится свободно, поэтому получаем корректное высказывание ∃x(x > x), однако это высказывание *ложно* в универсуме чисел. Применим правильно правило ∃в. Заменим в (x > 8) имя «8» на *новую* переменную, не содержащуюся в формуле (x > 8). Такой переменной будет любая, отличная от x, например, y. Получим формулу (x > y), играющую роль A(y). Теперь применим правило ∃в по переменной y. Результатом будет формула ∃y(x > y), которую можно превратить в истинное высказывание.

III. *Правило удаления квантора всеобщности* (∀у). Пусть дана формула вида ∀vA(v). Удалим из неё квантор всеобщности. Получим формулу A(v). Дальше есть три пути.

Во-первых, разрешается заменить каждое вхождение v на произвольное имя n. В результате получим формулу A(n) (которая уже не содержит переменной v).

Во-вторых, v можно не менять, оставив в качестве результата формулу A(v).

В-третьих, каждое вхождение v можно заменить другой переменной v′ при условии, что в A(v) v′ входит свободно. Получится формула A(v′).

Если v′ не свободно в A(v), то возникнут неприятности. Предположим, дана формула ∀x∃y(x < y), истинная на универсуме целых чисел. Стирая квантор всеобщности, получим формулу ∃y(x < y) в роли A(x). Переменная y не свободна в A(x). Заменим в A(x) x на y. Получим ложное утверждение ∃y(y < y).

IV. *Правило удаления квантора существования* (∃у). Обычно в натуральном исчислении предикатов принимают непрямое правило удаления существования (так что соблюдается симметрия: два кванторных правила прямых, и два косвенных).

$$\frac{\Gamma,\ A(v)\ \vdash B}{\Gamma,\ \exists v A(v)\ \vdash B}$$

В этом правиле v свободно в A(v), но связанно в Γ и B.

Если бы мы приняли это правило, понятие вывода осталось бы тем же самым, что и для исчисления высказываний. Однако поиск выводов в таких системах достаточно сложен. Положение упрощается, если разрешить прямое удаление квантора существования при помощи новых вспомогательных имён (для которых мы зарезервируем греческие буквы α, β, γ с индексами или без них), которые не входят в исходный список имён языка, зафиксированный в алфавите. Отныне *при построении формул разрешается использовать новые имена из дополнительного списка* $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \alpha_2$ ... .

Прямое правило ∃у работает следующим образом. Предположим, строится вывод, в котором на шаге n данное правило применяется к формуле $\exists vA(v)$. Сначала удалим квантор существования. Получится формула $A(v)$. Затем заменим каждое вхождение переменной v каким-либо дополнительным именем α так, чтобы соблюдались два условия.

Во-первых, *в текущем выводе имя* α*, введённое по правилу* ∃в*, должно появиться впервые* (т.е. на шагах вывода, номера которых меньше n, имя α не встречается). Во-вторых, *введённое по* ∃в *имя* α *не должно встречаться в заключении вывода.*

Эти два условия накладывают ограничение на понятие вывода, которое в остальном остаётся тем же самым, что и в натуральном исчислении высказываний. Точнее, принимается следующее определение вывода.

Выводом в K_N *называется конечная последовательность выражений, каждое из которых есть либо 1) посылка, либо 2) доказанная штопор-формула, либо 3) получается из предыдущих выражений последовательности по одному из правил вывода* системы K_N*; при этом каждое применение правила ∃у вводит новое имя, и последнее выражение не должно быть посылкой и не должно содержать имён, введённых по правилу ∃у.*

Все основные понятия, связанные с понятием вывода, остаются теми же самыми: определения понятий заключения, доказанной штопор-формулы, доказанной формулы (или теоремы) и доказательства не изменяются.

Выше мы дали формальное описание кванторных правил и способов их применения в выводах. Сейчас попробуем понять содержательный смысл введённых кванторных преобразований.

Правило введения квантора всеобщности (∀в) в идейном отношении ясно: если мы умеем из множества посылок Г (возможно, пустого) выводить формулу $A(x)$ для *произвольного* индивида x, то, следовательно, мы умеем делать это для *всех* индивидов рассматриваемого универсума, т.е. можем вывести из Г формулу $\forall xA(x)$. Как, например, доказать, что всякое число делится нацело на самого себя? Возьмём произвольное число n и разделим его на самого себя. Получим $(n : n) = 1$. Поскольку n действительно произвольно (ведь никакой конкретной информации о том, что это за число, не привлекалось), данное рассуждение верно для всех чисел. Следовательно, $\forall x(x : x) = 1$.

Правило введения квантора существования ($\exists$в). Если доказали A(x) хотя бы для одного индивида x, следовательно, существует такой x, который обладает свойством A, т.е. $\exists x A(x)$. Или, если согласиться, что Пушкин – это наше всё (*Наше всё(Пушкин)*), то придётся согласиться и с тем, что существует человек, который для нас всё ($\exists$x*Наше всё(*x*)*).

Правило удаления квантора всеобщности ($\forall$у), наверное, вообще не требует пояснений. Если все индивиды обладают свойство A, то и любой конкретный индивид также этим свойством обладает. Если все смертны, то и Сократ смертен.

Правило удаления квантора существования ($\exists$у) требует более развёрнутого комментария. Если мы знаем, что существует изобретатель колеса, то это совсем не означает, что нам знакомо имя изобретателя колеса. Или, скажем, мы уверены, что для любой пары целых чисел существует число, являющееся их произведением: $\forall x \forall y \exists z(x \times y = z)$. Значит, в частности, истинно высказывание (между прочим, полученное из исходного двукратным применением правила $\forall$у)

$$\exists x(879435872458306585 13 \times 5736220584028483239 4 = z).$$

Попробуйте, однако, предъявить имя этого x, т.е. конкретную цифру, обозначающую искомое целое число. Не всякий калькулятор справится с этой задачей.

Итак, имеются несомненные утверждения о существовании индивидов, настоящие имена которых мы либо затрудняемся найти, либо вообще предъявить не в состоянии. Как поступить в таком случае? В произведении Стругацких «Понедельник начинается в субботу» есть персонаж – говорящий кот Василий, страдавший склерозом. Вот какой выход нашёл этот кот.

> « – Дошло до меня, о великий царь, что в славном городе Багдаде жил-был портной, по имени... – он стал на четвереньки, выгнул спину и злобно зашипел. – Вот с этими именами у меня особенно отвратительно! Абу... Али... Кто-то ибн чей-то... Н-ну хорошо, скажем, Полуэкт. Полуэкт ибн... мнэ-э... Полуэктович... Все равно не помню, что было с этим портным. Ну и пёс с ним, начнем другую...»

Василий, не будучи в состоянии предъявить настоящее арабское имя портного, применяет прямое правило $\exists$у, вводя новое псевдоимя «Полуэкт»!

Аналогичным образом, мы можем ввести «полуэктовое» имя для громадного числа, существование которого только что утверждалось. Пусть это будет, скажем, α:

$(8794358724583065851 3 \times 5736220584028483239 4 = \alpha)$.

Такой приём резко облегчит дальнейшие рассуждения. Например, можно утверждать, что $10^{40} < \alpha < 10^{39}$, что α чётно и т.д. Но α – не цифра. Это как бы псевдоимя, которое в другом арифметическом рассуждении может обозначать другое число, например, нечётное. Предположим, удаляя квантор существования, в другом рассуждении получили

$(87943587245830658513 \times 57362205840284832395 = \alpha)$.

Поскольку невозможно, чтобы α было и чётным, и нечётным, от этого «полуэктового» имени необходимо избавиться *до того*, как рассуждение закончится. Отсюда требование, чтобы введённое по правилу $\exists$у имя α не встречалось в заключении вывода.

А если нам потребуется рассуждать об обоих равенствах одновременно? В таком случае избежать противоречия можно, если для введённого первым равенства оставить α, а для введённого вторым взять *новое* псевдоимя β, которое раньше в рассуждении не встречалось. Данное соображение мотивирует требование при каждом применении правила $\exists$у брать новое «полуэктовое» имя.

Если же правило $\exists$у не применялось, эти требования становятся излишними. Например, из допущений, что каждый человек смертен и что Полуэкт – человек следует, что Полуэкт – смертен. Или, в общем виде, из посылки $\forall x(P(x) \to Q(x))$ по правилу $\forall$у вытекает, что $(P(\alpha \to Q(\alpha))$, откуда и из посылки $P(\alpha)$ по $\to$у (всё тот же modus ponens) следует, что и $Q(\alpha)$. Нет никаких оснований отвергнуть это рассуждение по той причине, что в заключении вывода содержится «полуэктовое» имя α. Далее, новое применение $\forall$у не требует введения нового имени. Если каждый человек – животное и Полуэкт – человек, то и Полуэкт – животное. Короче говоря, ограничения на использование «полуэктовых» пседоимён касаются только прямого правила удаления квантора существования $\exists$у. Во всех остальных ситуациях рассуждения с этими именами столь же законны, сколь и рассуждения с «настоящими» именами.

Построим в K_N ряд важных для практических рассуждений выводов и доказательств.

$\vdash \forall x(P(x) \to P(x)$.

1.	$P(x)$	– доп.
2.	$P(x)$	– 1, р
3.	$P(x) \vdash P(x)$	– 1-2, $\vdash$в

4. $\vdash (P(x) \to P(x))$ — 3, →в

5. $\vdash \forall x(P(x) \to P(x))$ — 4, ∀в

В данном доказательстве предикатного варианта закона тождества правило ∀в применялось при пустом Г.

$\vdash (\forall xA(x) \to \exists xA(x))$

1. $\forall xA(x)$ — доп.
2. $A(x)$ — 1, ∀у
3. $\exists xA(x)$ — 2, ∃в
4. $\forall xA(x) \vdash \exists xA(x)$ — 1-3, ⊢в
5. $\vdash (\forall xA(x) \to \exists xA(x))$ — 4, →в

Это простое доказательство важно с семантической точки зрения. Полученная теорема утверждает, что каждое универсальное свойство (т.е. свойство, совпадающее с универсумом) будет непустым, что и требовалось (ведь каждый универсум рассуждения непуст).

$\forall x\forall yA(x, y) \vdash \forall y\forall xA(x, y)$

1. $\forall x\forall yA(x, y)$ — доп.
2. $\forall yA(x, y)$ — 1, ∀у
3. $A(x, y)$ — 2, ∀у
4. $\forall x\forall yA(x, y) \vdash A(x, y)$ — 1-3, ⊢в
5. $\forall x\forall yA(x, y) \vdash \forall xA(x, y)$ — 4, ∀в
6. $\forall x\forall yA(x, y) \vdash \forall y\forall xA(x, y)$ — 5, ∀в

Роль Г выполняет формула $\forall x\forall yA(x, y)$, в которой и x, и y связанны. Поэтому имеем право на шагах 5 и 6 применить правило ∀в. Самостоятельно постройте вывод в другую сторону: $\forall y\forall xA(x, y) \vdash \forall x\forall yA(x, y)$.

$\exists x\exists yA(x, y) \vdash \exists y\exists xA(x, y)$

1. $\exists x\exists yA(x, y)$ — доп.
2. $\exists yA(\alpha, y)$ — 1, ∃у
3. $A(\alpha, \beta)$ — 2, ∃у
4. $\exists xA(x, \beta)$ — 3, ∃в
5. $\exists y\exists xA(x, y)$ — 4, ∃в
6. $\exists x\exists yA(x, y) \vdash \exists y\exists xA(x, y)$ — 1-5, ⊢в

На втором шаге введено по ∃у временное имя α. На третьем шаге α использовать уже нельзя (ни откуда не вытекает, что $A(\alpha, \alpha)$), поэтому вводим новое временное имя β. Затем, дважды применяя ∃в, избавляемся от этих вспомогательных имён. Подчеркнём, что ни одна из последовательностей 1-2, 1-3 и 1-4 не образует вывода, т.к. все они заканчиваются формулами, содержащими «полуэктовые» имена, введённые по правилу ∃у. Вывод в обратную сторону $\exists y\exists xA(x, y) \vdash \exists x\exists yA(x, y)$ постройте самостоятельно.

Полученные выводы говорят о том, что стоящие рядом однородные кванторы можно менять местами. А если кванторы разнородны? Оказывается, существует следующий вывод.

$\exists x \forall y A(x, y) \vdash \forall y \exists x A(x, y)$

1.	$\exists x \forall y A(x, y)$	– доп.
2.	$\forall y A(\alpha, y)$	– 1, $\exists$у
3.	$A(\alpha, y)$	– 2, $\forall$у
4.	$\exists x A(x, y)$	– 3, $\exists$в
5.	$\exists x \forall y A(x, y) \vdash \exists x A(x, y)$	– 1-4, $\vdash$в
6.	$\exists x \forall y A(x, y) \vdash \forall y \exists x A(x, y)$	–5, $\forall$в

Попробуем теперь построить вывод в обратную сторону, т.е. из $\forall y \exists x A(x, y)$ вывести $\exists x \forall y A(x, y)$.

1.	$\forall y \exists x A(x, y)$	– доп.
2.	$\exists x A(x, y)$	– 1, $\forall$у
3.	$A(\alpha, y)$	– 2, $\exists$у

Дальше требуется вывести формулу $\forall y A(\alpha, y)$, применив для этого $\forall$в. Для этого требуется вначале по $\vdash$в получить вывод $\forall y \exists x A(x, y) \vdash A(\alpha, y)$. Однако последовательность 1-3 не является выводом, поскольку её заключительная формула $A(\alpha, y)$ содержит псевдоимя α, полученное по $\exists$у. Может быть, задачу можно решить другим способом? Оказывается, нет. Доказано, что вывод $\forall y \exists x A(x, y) \vdash \exists x \forall y A(x, y)$ построить невозможно.

Но это просто замечательно. Такого вывода и не должно быть. Ведь можно предложить интерпретацию, в которой посылка $\forall y \exists x A(x, y)$ истинна, а заключение $\exists x \forall y A(x, y)$ ложно, т.е. из $\forall y \exists x A(x, y)$ *не следует* $\exists x \forall y A(x, y)$. В самом деле, в универсуме целых чисел формула $\forall y \exists x(x > y)$, утверждающая, что для каждого числа y найдётся большее число x, истинна. Однако формула $\exists x \forall y A(x > y)$, утверждающая существование числа x, которое больше любого числа y (включая само x), ложна.

Следующие теоремы логики предикатов показывают, как кванторы взаимодействуют с логическими связками.

$\vdash (\forall x(A(x) \,\&\, B(x)) \to (\forall x A(x) \,\&\, \forall x B(x)))$

1.	$\forall x(A(x) \,\&\, B(x))$	– доп.
2.	$(A(x) \,\&\, B(x))$	– 1, $\forall$у
3.	$A(x)$	– 2, &у1
4.	$\forall x(A(x) \,\&\, B(x)) \vdash A(x)$	– 1-3, $\vdash$в
5.	$B(x)$	– 2, &у2
6.	$\forall x(A(x) \,\&\, B(x)) \vdash B(x)$	– 1-2, 5, $\vdash$в

7. $\forall x(A(x)\ \&\ B(x)) \vdash \forall x A(x)$ — 4, ∀в
8. $\forall x(A(x)\ \&\ B(x)) \vdash \forall x B(x)$ — 6, ∀в
9. $\vdash (\forall x(A(x)\ \&\ B(x)) \rightarrow \forall x A(x))$ — 7, →в
10. $\vdash (\forall x(A(x)\ \&\ B(x)) \rightarrow \forall x B(x))$ — 8, →в
11. $(\forall x(A(x)\ \&\ B(x)) \rightarrow \forall x A(x))$ — 9, ⊢у
12. $(\forall x(A(x)\ \&\ B(x)) \rightarrow \forall x B(x))$ — 10, ⊢у
13. $\forall x A(x)$ — 1, 11, →у
14. $\forall x B(x)$ — 1, 12, →у
15. $(\forall x A(x)\ \&\ \forall x B(x))$ — 13, 14, &в
16. $\forall x(A(x)\ \&\ B(x)) \vdash (\forall x A(x)\ \&\ \forall x B(x))$ — 1-15, ⊢в
17. $\vdash (\forall x(A(x)\ \&\ B(x)) \rightarrow (\forall x A(x)\ \&\ \forall x B(x)))$ — 16, →в

Постройте самостоятельно доказать обратную теорему
$\vdash ((\forall x A(x)\ \&\ \forall x B(x)) \rightarrow (\forall x(A(x)\ \&\ B(x))))$.
$\vdash ((\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x)))$
1. $\forall x A(x)$ — доп.
2. $A(x)$ — 1, ∀у
3. $(A(x) \vee B(x))$ — 2, ∨в1
4. $\forall x A(x) \vdash (A(x) \vee B(x))$ — 1-3, ⊢в
5. $\forall x A(x) \vdash \forall x(A(x) \vee B(x))$ — 4, ∀в
6. $\forall x B(x)$ — доп.
7. $B(x)$ — 6, ∀у
8. $(A(x) \vee B(x))$ — 7, ∨в2
9. $\forall x B(x) \vdash (A(x) \vee B(x))$ — 6-8, ⊢в
10. $\forall x B(x) \vdash \forall x(A(x) \vee B(x))$ — 9, ∀в
11. $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \vdash \forall x(A(x) \vee B(x))$ — 5, 10, ∨у
12. $\vdash ((\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x)))$ — 11, →в

В обратную сторону теоремы не получится. Но она и не должна получиться, поскольку из $\forall x(A(x) \vee B(x))$ не следует $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x))$. Действительно, пусть $B(x)$ есть $\neg A(x)$, т.е. свойство $B(x)$ состоит в отрицании свойства $A(x)$. Формула $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ истинна в любом универсуме (кстати, докажите теорему $\vdash \forall x(A(x) \vee \neg A(x)))$, поскольку любой объект x либо обладает, либо не обладает свойством $A(x)$. Но формула $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x))$ может быть ложной. Например, в универсуме помидоров каждый помидор либо спелый, либо не спелый, т.е. ∀x(*Спелый*(x) ∨ ¬*Спелый*(x)), однако отсюда не вытекает, что все помидоры спелые или все они не спелые, т.е. (∀x*Спелый*(x) ∨ ∀x¬*Спелый*(x)).

В противоположность этому, для квантора существования имеет место как $\vdash ((\exists x A(x) \vee \exists x B(x)) \to \exists x(A(x) \vee B(x)))$, так и $\vdash (\exists x(A(x) \vee B(x)) \to (\exists x A(x) \vee \exists x B(x)))$. Убедимся в сказанном.

$\vdash ((\exists x A(x) \vee \exists x B(x)) \to \exists x(A(x) \vee B(x)))$

1.	$\exists x A(x)$	– доп.
2.	$A(\alpha)$	– 1, $\exists$у
3.	$A(\alpha) \vee B(\alpha)$	– 2, $\vee$в1
4.	$\exists x(A(x) \vee B(x))$	– 3, $\exists$в
5.	$\exists x A(x) \vdash \exists x(A(x) \vee B(x))$	– 1-4, $\vdash$в
6.	$\exists x B(x)$	– доп.
7.	$B(\beta)$	– 6, $\exists$у
8.	$A(\beta) \vee B(\beta)$	– 7, $\vee$в2
9.	$\exists x(A(x) \vee B(x))$	– 8, $\exists$в
10.	$\exists x B(x) \vdash \exists x(A(x) \vee B(x))$	– 6-9, $\vdash$в
11.	$(\exists x A(x) \vee \exists x B(x)) \vdash \exists x(A(x) \vee B(x))$	– 5, 10, $\vee$у
12.	$\vdash ((\exists x A(x) \vee \exists x B(x)) \to \exists x(A(x) \vee B(x)))$	– 11, $\to$в

$\vdash (\exists x(A(x) \vee B(x)) \to (\exists x A(x) \vee \exists x B(x)))$

1.	$\exists x(A(x) \vee B(x))$	– доп.
2.	$(A(\alpha) \vee B(\alpha))$	– 1, $\exists$у
3.	$A(\alpha)$	– доп.
4.	$\exists x A(x)$	– 3, $\exists$в
5.	$(\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$	– 4, $\vee$в1
6.	$A(\alpha) \vdash (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$	– 3-5, $\vdash$в
7.	$B(\alpha)$	– доп.
8.	$\exists x B(x)$	– 7, $\exists$в
9.	$(\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$	– 8, $\vee$в2
10.	$B(\alpha) \vdash (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$	– 7-9, $\vdash$в
11.	$(A(\alpha) \vee B(\alpha)) \vdash (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$	– 6, 10, $\vee$у
12.	$\vdash ((A(\alpha) \vee B(\alpha)) \to (\exists x A(x) \vee \exists x B(x)))$	– 11, $\to$в
13.	$((A(\alpha) \vee B(\alpha)) \to (\exists x A(x) \vee \exists x B(x)))$	– 12, $\vdash$у
14.	$(\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$	– 2, 13, $\to$у
15.	$\exists x(A(x) \vee B(x)) \vdash (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$	– 1, 2, 6, 10-14, $\vdash$в
16.	$\vdash (\exists x(A(x) \vee B(x)) \to (\exists x A(x) \vee \exists x B(x)))$	– 15, $\to$в

Полученное доказательство нуждается в объяснении. Прежде всего, мы утверждаем, что штопор-формула $A(\alpha) \vdash (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$ является *доказанной*. Действительно, по определению, штопор-формула является доказанной, если существует вывод, заключением которого она является. Такой вывод существует, но это не последовательность 1-6! Данная последовательность вообще не является выводом, т.к. её заключительное выражение содержит имя α, введённое по правилу $\exists$у. Зато последовательность

3-6 является выводом штопор-формулы $A(\alpha) \vdash (\exists xA(x) \vee \exists xB(x))$, поскольку, хотя имя α взято из дополнительно списка имён, α не было введено в вывод 3-6 по правилу $\exists$у. Аналогичным образом, *доказана* штопор-формула $B(\alpha) \vdash (\exists xA(x) \vee \exists xB(x))$, являющаяся заключением вывода 7-10. Поэтому последовательность выражений 1, 2, 6, 10, 11, 12, 13, 14 удовлетворяет определению вывода и к ней можно применить правило $\vdash$в.

$\vdash (\forall x(A(x) \to B(x)) \to (\forall xA(x) \to \forall xB(x)))$

1.	$\forall x(A(x) \to B(x))$	– доп.
2.	$\forall xA(x)$	– доп.
3.	$A(x)$	– 2, $\forall$у
4.	$(A(x) \to B(x))$	– 1, $\forall$у
5.	$B(x)$	– 3, 4, $\to$у
6.	$\forall x(A(x) \to B(x)), \forall xA(x) \vdash B(x)$	– 1-5, $\vdash$в
7.	$\forall x(A(x) \to B(x)), \forall xA(x) \vdash \forall xB(x)$	– 6, $\forall$в
8.	$\forall x(A(x) \to B(x)) \vdash (\forall xA(x) \to \forall xB(x))$	– 7, $\to$в
9.	$\vdash (\forall x(A(x) \to B(x)) \to (\forall xA(x) \to \forall xB(x)))$	– 8, $\to$в

Обратное утверждение не является логическим законом. Рассмотрим следующий контрпример, в котором в качестве универсума берется класс всех людей. Пусть A(x) – это *Долгожитель*(x), а B(x) – это *Мужчина*(x). Тогда импликация ($\forall$x*Долгожитель*(x) $\to$ $\forall$x*Мужчина*(x)) истинна, поскольку её антецедент «Все люди долгожители» (т.е. $\forall$x*Долгожитель*(x)) ложен. Но утверждение $\forall$x(*Долгожитель*(x) $\to$ *Мужчина*(x)), как известно, ложно. Таким образом, из истинного ($\forall$xДолгожитель(x) $\to$ $\forall$xМужчина(x)) не следует ложное $\forall$x(*Долгожитель*(x) $\to$ *Мужчина*(x)).

Если, однако, A не содержит x или x связанна в A, то будет доказуема как штопор-формула $\vdash (\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall xB(x)))$, так и обратная штопор-формула $\vdash ((A \to \forall xB(x)) \to \forall x(A \to B(x)))$. Докажем последнюю штопор-формулу (первую докажите самостоятельно).

$\vdash ((A \to \forall xB(x)) \to \forall x(A \to B(x)))$, если x связанна в A или в A нет x.

1.	$(A \to \forall xB(x))$	– доп.
2.	A	– доп.
3.	$\forall xB(x)$	– 2, 1, $\to$у
4.	$B(x)$	– 3, $\forall$у
5.	$(A \to \forall xB(x)), A \vdash B(x)$	– 1-4, $\vdash$в
6.	$(A \to \forall xB(x)) \vdash (A \to B(x))$	– 5, $\to$в
7.	$(A \to \forall xB(x)) \vdash \forall x(A \to B(x))$	– 6, $\forall$в
8.	$\vdash ((A \to \forall xB(x)) \to \forall x(A \to B(x)))$	– 7, $\to$в

Применение на шаге 7 правила ∀в стало возможным потому, что в посылку $(A \to \forall x B(x))$ переменная x входит связанно.

$\vdash (\forall x(A(x) \to B) \to (\exists x A(x) \to B))$

1. $\forall x(A(x) \to B)$ — доп.
2. $\exists x A(x)$ — доп.
3. $A(\alpha)$ — 2, ∃у
4. $(A(\alpha) \to B)$ — 1, ∀у
5. B — 3, 4, →у
6. $\forall x(A(x) \to B), \exists x A(x) \vdash B$ —1-5, ⊢в
7. $\forall x(A(x) \to B) \vdash (\exists x A(x) \to B)$ —6, →в
8. $\vdash (\forall x(A(x) \to B) \to (\exists x A(x) \to B))$ —7, →в

$\vdash ((\exists x A(x) \to B) \to \forall x(A(x) \to B))$, если x связанна в B или в B нет x.

1. $(\exists x A(x) \to B)$ — доп.
2. $A(x)$ — доп.
3. $\exists x A(x)$ — 2, ∃в
4. B — 3, 1 →у
5. $(\exists x A(x) \to B), A(x) \vdash B$ — 1-4, ⊢в
6. $(\exists x A(x) \to B) \vdash (A(x) \to B)$ — 5, →в
7. $(\exists x A(x) \to B) \vdash \forall x(A(x) \to B)$ — 6, ∀в
8. $\vdash ((\exists x A(x) \to B) \to \forall x(A(x) \to B))$ —7, →в

Если бы, к примеру, переменная x была свободной в B, то шаг 7 был бы незаконным.

Завершим изучение натурального исчисления предикатов доказательством четырёх важных теорем о взаимной определимости кванторов через связку ¬.

$\vdash (\forall x A(x) \to \neg\exists x \neg A(x))$

1. $\forall x A(x)$ — доп.
2. $\exists x \neg A(x)$ — доп.
3. $\neg A(\alpha)$ — 2, ∃у
4. $A(\alpha)$ — 1, ∀у
5. $A(\alpha), \neg A(\alpha) \vdash \neg A(x)$ — док. (см. §9 гл. 4)
6. $A(\alpha) \vdash (\neg A(\alpha) \to \neg A(x))$ — 5, →в
7. $\vdash (A(\alpha) \to (\neg A(\alpha) \to \neg A(x)))$ — 6, →в
8. $(A(\alpha) \to (\neg A(\alpha) \to \neg A(x)))$ — 7, ⊢у
9. $(\neg A(\alpha) \to \neg A(x))$ — 4, 8, →у
10. $\neg A(x)$ — 3, 9, →у
11. $\forall x A(x), \exists x \neg A(x) \vdash \neg A(x)$ — 1-10, ⊢в
12. $A(x)$ — 1, ∀у

13. $\forall xA(x), \exists x\neg A(x) \vdash A(x)$ — 1, 2, 12, $\vdash$в
14. $\forall xA(x) \vdash \neg\exists x\neg A(x)$ — 11, 13, $\neg$в
15. $\vdash (\forall xA(x) \to \neg\exists x\neg A(x))$ — 14, $\to$в

Отметим, что последовательность 1-3 не образует вывода $\forall xA(x), \exists x\neg A(x) \vdash \neg A(\alpha)$, т.к. имя α в $\neg A(\alpha)$ получено по $\exists$у. То, что при этом имели вывод $\forall xA(x), \exists x\neg A(x) \vdash A(\alpha)$ (шаги 1, 2, 4), помочь уже не могло. Решение проблемы нашлось в том, чтобы доказать штопор-формулы $\forall xA(x), \exists x\neg A(x) \vdash \neg A(x)$ и $\forall xA(x), \exists x\neg A(x) \vdash A(x)$, в которых имя α вообще не встречается. Для этого нам понадобились формулы $\neg A(\alpha)$ и $A(\alpha)$ (полученные, соответственно, на 3 и 4 шаге вывода 1-15), и ранее доказанная (в §9 гл. 4) штопор-формула $A, \neg A \vdash B$ (точнее, её предикатный вариант $A(\alpha), \neg A(\alpha) \vdash \neg A(x)$).

$\vdash (\neg\exists x\neg A(x) \to \forall xA(x))$

1. $\neg\exists x\neg A(x)$ — доп.
2. $\neg A(x)$ — доп.
3. $\exists x\neg A(x)$ — 2, $\exists$в
4. $\neg\exists x\neg A(x), \neg A(x) \vdash \exists x\neg A(x)$ — 1-3, $\vdash$в
5. $\neg\exists x\neg A(x)$ — 1, р
6. $\neg\exists x\neg A(x), \neg A(x) \vdash \neg\exists x\neg A(x)$ — 1, 2, 5, $\vdash$в
7. $\neg\exists x\neg A(x) \vdash \neg\neg A(x)$ — 4, 6, $\neg$в
8. $\neg\neg A(x) \vdash A(x)$ — док.
9. $\neg\exists x\neg A(x) \vdash A(x)$ — 7, 8, тр.
10. $\neg\exists x\neg A(x) \vdash \forall xA(x)$ —9, $\forall$в
11. $\vdash (\neg\exists x\neg A(x) \to \forall xA(x))$ — 10, $\to$в

$\vdash (\exists xA(x) \to \neg\forall x\neg A(x))$

1. $\exists xA(x)$ — доп.
2. $\forall x\neg A(x)$ — доп.
3. $A(\alpha)$ — 1, $\exists$у
4. $\neg A(\alpha)$ — 2, $\forall$у
5. $\vdash (A(\alpha) \to (\neg A(\alpha) \to A(x)))$ — док.
6. $(A(\alpha) \to (\neg A(\alpha) \to A(x)))$ — 5, $\vdash$у
7. $(\neg A(\alpha) \to A(x))$ — 3, 6, $\to$у
8. $A(x)$ — 4, 7, $\to$у
9. $\exists xA(x), \forall x\neg A(x) \vdash A(x)$ — 1-8, $\vdash$в
10. $\neg A(x)$ — 2, $\forall$у
11. $\exists xA(x), \forall x\neg A(x) \vdash \neg A(x)$ — 1, 2, 10, $\vdash$в
12. $\exists xA(x) \vdash \neg\forall x\neg A(x)$ — 9, 11, $\neg$в
13. $\vdash (\exists xA(x) \to \neg\forall x\neg A(x))$ — 12, $\to$в

$\vdash (\neg\forall x\neg A(x) \to \exists xA(x))$

1. $\neg\forall x\neg A(x)$ — доп.

2. $\neg\exists x\neg\neg A(x)$ — доп.
3. $\vdash (\neg\exists x\neg\neg A(x) \rightarrow \forall x\neg A(x))$ — док.
4. $(\neg\exists x\neg\neg A(x) \rightarrow \forall x\neg A(x))$ — 3, $\vdash$у
5. $\forall x\neg A(x)$ — 2, 4, $\rightarrow$у
6. $\neg\forall x\neg A(x), \neg\exists x\neg\neg A(x) \vdash \forall x\neg A(x)$ — 1-5, $\vdash$в
7. $\neg\forall x\neg A(x)$ — 1, р
8. $\neg\forall x\neg A(x), \neg\exists x\neg\neg A(x) \vdash \neg\forall x\neg A(x)$ — 1, 2, 7, $\vdash$в
9. $\neg\forall x\neg A(x) \vdash \neg\,\neg\exists x\neg\neg A(x)$ — 6, 8, $\neg$в
10. $\neg\,\neg\exists x\neg\neg A(x) \vdash \exists x\neg\neg A(x)$ — док.
11. $\neg\forall x\neg A(x) \vdash \exists x\neg\neg A(x)$ — 9, 10, тр.
12. $\exists x\neg\neg A(x)$ — доп.
13. $\neg\neg A(\alpha)$ — 12, $\exists$у
14. $A(\alpha)$ — 13, $\neg$у
15. $\exists x A(x)$ — 14, $\exists$в
16. $\exists x\neg\neg A(x) \vdash \exists x A(x)$ — 12-14, $\vdash$в
17. $\neg\forall x\neg A(x) \vdash \exists x A(x)$ — 11, 16, тр.
18. $\vdash (\neg\forall x\neg A(x) \rightarrow \exists x A(x))$ — 17, $\rightarrow$ в

Как вы могли убедиться, построение выводов в логике предикатов не всегда простое дело. В отличие от логики высказываний, логика предикатов требует творческого подхода. При этом, конечно, в целом ряде типичных ситуаций существуют хорошо отлаженные методы построения выводов. С некоторыми из них вы познакомились и можете с успехом применять эти методы в теории и на практике там, где необходима логическая точность в рассуждениях.

Что касается метасвойств построенного исчисления K_N, то мы лишь упомянем о важнейших из них без подробных разъяснений.

Во-первых, *высказывание* A *является теоремой в* K_N *тогда, и только тогда, когда* A *истинно в любом универсуме рассуждений*, что можно для высказывания A коротко записать в виде $\vdash A \Leftrightarrow \models A$. Иначе говоря, всякое доказуемое в K_N высказывание будет логическим законом, и всякое высказывание, являющееся логическим законом, будет доказуемо в K_N. Отсюда вытекает, что K_N *непротиворечиво* (ведь высказывания A и $\neg$A не могут быть вместе истинными ни в одном универсуме). Поскольку в силу тех же причин, что и для системы P_0, понятия противоречивости и абсолютной противоречивости для исчисление K_N совпадают, верно также, что K_N *абсолютно непротиворечиво.*

Во-вторых, *составленная только из высказываний штопор-формула* $\Gamma \vdash A$ *будет доказуема в* K_N *тогда, и только тогда, когда в любом универсуме, если все высказывания из* Γ *истинны, то высказывание* A *также будет истинно.* Т.е. для высказываний имеет место $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Gamma \models A$. Другими словами, из множества высказываний Γ в K_N выводимо высказывание A в том, и только в том, случае, если из Γ логически следует A.

Таким образом, для исчисления K_N верны метатеоремы о семантической корректности, непротиворечивости и полноте.

ЧАСТЬ III. ЛОГИКА В ПРИЛОЖЕНИЯХ

ГЛАВА 6. АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

Что такое теория – вопрос сложный, если попытаться ответить на него во всей полноте. Мы упростим этот вопрос, посмотрев на теорию с синтаксической точки зрения. **Теория** – *это множество высказываний, замкнутое относительно выводимости*. Выражение «замкнутое относительно выводимости» означает, что все высказывания, которые либо выводятся из каких-то высказываний теории T, либо выводятся из пустого множества посылок, принадлежат данной теории T. В частности, если высказывание B принадлежит T (символически $B \in T$) и из B выводится высказывание A (т.е. $B \vdash A$), то A также принадлежит T ($A \in T$). Если же высказывание A является теоремой логики $\vdash A$, то A автоматически попадает в *каждую* теорию T, поскольку A выводится из пустого множества посылок.

Таким образом, каждая теория содержит в себе всё бесконечное множество теорем логики, и потому всякая теория бесконечна, хотя фактически мы в состоянии актуально предъявить лишь конечное множество конкретных высказываний теории. *Минимальной теорией*, на базе которой строятся все остальные теории, является множество высказываний, являющихся теоремами логики. Любое не совпадающее с этим множеством его подмножество уже не будет замкнуто относительно выводимости и, по вышеприведённому определению, не будет теорией.

Высказывания, являющиеся теоремами логики, истинны в любом универсуме. Но познающего субъекта могут интересовать ситуации, складывающиеся не во всех, а лишь в некоторых универсумах. Тогда теории должны, наряду с теоремами логики, содержать истинные *прикладные высказывания*, описывающие положения дел в только этих (а не во всех) универсумах. В результате создаются *прикладные теории*, выходящие за рамки чистой логики.

Конкретно, построение прикладной теории будет проходить следующим путём. К исчислению предикатов K_N добавляется некоторое количество прикладных высказываний, играющих роль *аксиом*, затем средствами K_N осуществляется процесс выведения следствий из аксиом. Это требует *добавления к понятию натурального вывода пункта, разрешающего любую аксиому помещать в вывод.* В частности, последовательность выражений, состоящая из одних аксиом, будет корректным выводом. Полученные этим способом *аксиоматические теории* и будут предметом нашего внимания в данной главе.

§1. Теории эквивалентности и сходства

Первым примером прикладной аксиоматической теории будет *теория эквивалентности.* Она задаётся следующим набором прикладных аксиом.

A1. $\forall x(x \sim x)$
A2. $\forall x\forall y((x \sim y) \to (y \sim x))$
A3. $\forall x\forall y\forall z(((x \sim y) \& (y \sim z))\to (x \sim z))$

Запись бинарного отношения $(x \sim y)$ читается «x эквивалентен y». Аксиома A1 называется аксиомой *рефлексивности.* Смысл её прост: всякий индивид эквивалентен самому себе. Следующая аксиома A2 именуется аксиомой *симметричности.* Согласно A2, для любых x и y, если $(x \sim y)$, то $(y \sim x)$. Последняя аксиома A3 называется аксиомой *транзитивности.* Посредством транзитивности для любых x, y и z разрешается переход от $((x \sim y) \& (y \sim z))$ к $(x \sim z)$.

Всякое бинарное отношение, удовлетворяющее данным трём аксиомам, законно может быть названо отношением эквивалентности. Вместо предъявления аксиом можно упомянуть их названия. Поэтому говорят, что *любое рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение есть отношение эквивалентности.* Однако записать выделенные курсивом слова на языке первопорядковой логики предикатов нельзя, потому что данное выражение ссылается на второпорядковые свойства отношений (свойство отношения «Быть рефлексивным», «Быть симметричным» и т.д.), а не индивидов. Поэтому здесь вольность речи, допустимая в естественном языке, но не допустимая в строгой теории.

В действительности, бинарное понятие «эквивалентность» не было определено нами явно. Определение этого понятия было дано *неявным* образом, посредством аксиоматического описания поведения эквивалентных индивидов. Аксиоматические первопорядковые теории (а только такие теории мы будем здесь рассматривать) не содержат явных определений *исходных* понятий. Вместо этого они несут информацию об этих понятиях, раскрывающуюся в высказываниях, являющихся следствиями аксиом.

Далеко не всякое бинарное отношение удовлетворяет приведённым аксиомам. Например, отношение больше > нарушает первые две аксиомы, поскольку оба высказывания $\forall x(x > x)$ и $\forall x\forall y((x > y) \rightarrow (y > x))$ ложны при обычной интерпретации этого отношения. Зато аксиома транзитивности выполняется для отношения >: высказывание $\forall x\forall y\forall z(((x > y) \& (y > z))\rightarrow (x > z))$ истинно.

Смысл отношения эквивалентности – в приравнивании индивидов универсума по отношению к какому-либо признаку. Например, на универсуме людей возьмём в качестве признака отношение «x родился в том же году, что и y». Проверим аксиомы.

Ясно, что для каждого человека верно, что он родился в том же году, в котором он родился. Отсюда истинно высказывание ∀x(x родился в том же году, что и x). Столь же очевидно, что если x родился в том же году, что и y, то y родился в том же году, что и x. Значит, истинно ∀x∀y(x родился в том же году, что и y → y родился в том же году, что и x). Наконец, если x родился в том же году, что и y, а y родился в том же году, что и z, то x также родился в том же году, что и z. Так что истинно и высказывание ∀x∀y∀z((x родился в том же году, что и y & y родился в том же году, что и z) → (x родился в том же году, что и z)). Итак, все три аксиомы выполняются для отношения «x родился в том же году, что и y». Следовательно, отношение «x родился в том же году, что и y» есть отношение эквивалентности. Если кто-то на самом деле занят изучением вопроса о том, кто когда родился, он может вместо длинного «x родился в том же году, что и y» использовать короткое $(x \sim y)$.

Второй пример реализации абстрактных аксиом эквивалентности на конкретном материале – разбиение студентов на группы в зависимости от успеваемости. В российских ВУЗах успеваемость студентов оценивается по четырёх бальной шкале: неудовлетворительно (2), удовлетворительно (3), хорошо (4) и отлично (5). Обычно выделяют группы двоечников, троечников, хорошистов и отличников. Тогда бинарное отношение «x имеет одинаковую успеваемость с y» можно понимать как попадание x и y ровно в одну из перечисленных четырёх групп. В этом случае данное отношение становится отношением эквивалентности (проведите соответствующее рассуждение самостоятельно).

Обратим внимание на то, что если понятия двоечников, троечников, хорошистов и отличников определены неаккуратно, то один и тот же индивид x может попасть сразу в несколько групп по успеваемости. Например, если мы определим двоечника как студента, имеющего оценку «неудовлетворительно» по какому-либо предмету, а троечника как студента, имеющего оценку «удовлетворительно», то в результате некоторые студенты окажутся одновременно и двоечниками, и троечниками. В этом случае группы двоечников и троечников «склеятся» между собой.

Действительно, если для некоторого y одновременно верно «Двоечник(y)» и «Троечник(y)», то придётся признать, что y одинаково успевает с самым отъявленным двоечником x (потому что оба они двоечники), и y одинаково успевает с бывшим отличником z, получившим единственную тройку из-за нелюбви к логике (потому что оба они троечники). В силу транзитивности, из «x имеет одинаковую успеваемость с y» и «y имеет одинаковую успеваемость с z» выводится «x имеет одинаковую успеваемость с z», что явно несправедливо. Значит, надо так определить категории студентов в зависимости от успеваемости, чтобы каждый студент попал ровно в одну категорию.

Этот пример выводит нас на одну общую характеристику отношения эквивалентности. Возьмём какой угодно универсум рассуждений U. С логической точки зрения, этому универсуму соответствует универсальное понятие (точнее, свойство) U(x). Если правильно осуществить операцию *деления* объёма данного понятия, то в результате должны получиться непустые и непересекающиеся множества индивидов U_1, U_2, ..., в совокупности образующие исходное множество U. Теперь для всех x и y положим $(x\ R\ y) \Leftrightarrow x \in U_i$ и $y \in U_i$ для некоторого U_i. Мы утверждаем, что R будет отношением эквивалентности.

В самом деле, для любого x будет (x R x), поскольку если $x \in U_i$, то, конечно, $x \in U_i$. Симметричность $(x\ R\ y) \rightarrow (y\ R\ x)$ выполняется, поскольку если $x \in U_i$ и $y \in U_i$, то и наоборот, $y \in$

U_i и $x \in U_i$. Осталось проверить транзитивность. Пусть $(x\ R\ y)$ и $(y\ R\ z)$. Тогда найдутся U_i, U_j такие, что $x \in U_i$, $y \in U_i$ и $y \in U_j$, $z \in U_j$. Но индивид y не может принадлежать одновременно разным членам деления, т.к. разные члены деления не пересекаются между собой. Значит, $U_i = U_j$, откуда $x \in U_i$ и $z \in U_i$. В итоге имеем $(x\ R\ z)$, что и требовалось.

Следовательно, осуществив деление некоторого непустого понятия, вы порождаете (указанным только что способом) некоторое отношение эквивалентности. Индивиды, попавшие в один и тот же член деления, будут эквивалентны между собой; если же два индивида попали в разные члены деления, то они не будут эквивалентны. В предыдущих рассмотрениях мы разбили множество людей на непересекающиеся группы родившихся в одном и том же году, а множество студентов на четыре непересекающиеся группы по успеваемости. В каждом случае, как мы видели, получились отношения, удовлетворяющие аксиомам эквивалентности.

Верно и обратное. Если на каком-либо универсуме корректно задано отношение эквивалентности, то оно порождает деление этого универсума на непустые непересекающиеся части. Доказательство этого факта мы опускаем.

В рассуждениях нам приходится не только приравнивать индивиды по каким-то признакам, вводя отношение эквивалентности, но и вести речь о похожих или сходных индивидах. Аксиоматическая *теория сходства* очень проста. Она получается из теории эквивалентности отбрасыванием аксиомы транзитивности.

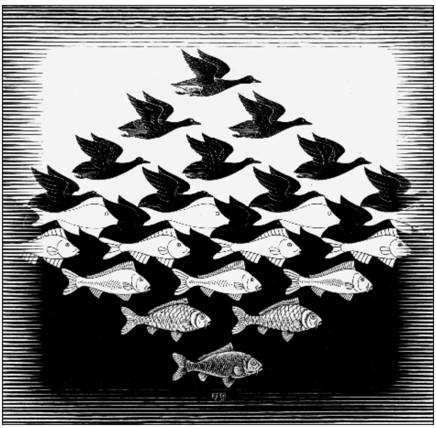
A1. $\forall x(x \approx x)$

A2. $\forall x \forall y((x \approx y) \rightarrow (y \approx x))$

Выражение $(x \approx y)$ читается как «x похож на y» или «x сходен с y». Ясно, что каждый индивид похож на самого себя. Отсюда первая аксиома. Далее, если первый индивид похож на второго, то и второй похож на первого. Однако, с интуитивной точки зрения, если первый индивид похож на второго, а второй на третьего, то сходства между первым и третьим уже может и не быть.

Например, договоримся считать два слова сходными, если они содержат одинаковое число букв и различаются не более, чем одной буквой. Одинаковые слова содержат одинаковое количество букв и различаются не более, чем одной буквой (на самом деле вообще не различаются по буквам). Следовательно, слово x сходно со словом x. И если между словами x и y, содержащими одинаковое количество букв, разница лишь в не более, чем одной букве, то и между словами у и х такая же разница, поэтому из х сходен с у выводится у сходен с х. Значит, введённое отношение на универсуме слов действительно является отношением сходства. Но это отношение не транзитивно. Так, слова «слон» и «стон» сходны: слон ≈ стон. Далее, стон ≈ стан. Но уже не верно, что слова слон и стан похожи: ¬(слон ≈ стан). Стало быть, из (х ≈ у) и (у ≈ z) не выводится, что (х ≈ z), т.е. отношение ≈ не транзитивно.

Определим бинарное отношение «х ровесник у» следующим образом: (х ровесник у) тогда, и только тогда, когда разница в возрасте между х и у не превышает одного года. Очевидно, что



разницы между возрастом х и х нет никакой, поэтому (х ровесник х) и рефлексивность обеспечена. Выполняется также аксиома симметричности: если (х ровесник у), то разница в возрасте между х и у не превышает одного года. Значит, разница в возрасте между у и х также не превышаетодного года, откуда имеем (у ровесник х). Пусть, однако, х младше у на 7 месяцев, а у младше z на 7 месяцев. Поскольку разница в возрасте между х и у, а так же между у и z не превышает года, получаем (х ровесник у) и (у ровесник z). Но разница между х и z уже превышает год, поэтому ¬(х ровесник z), так что отношение сходства (х ровесник у) вновь не транзитивно. В образной форме пример отношения сходства представлен на гравюре М.Эшера «Небо и вода».

Могут подумать, что всякое отношение сходства обязательно не транзитивно, но это ошибочный вывод. Если бы мы хотели запретить транзитивность, то надо было бы явно принять соответствующую аксиому. Например, следующую аксиому.

$\exists x \exists y \exists z(((x \approx y) \ \& \ (y \approx z)) \ \& \neg (x \approx z))$

Но было бы не разумно это делать. Почему, например, считать отношением сходства не транзитивное понятие «быть ровесником», но не считать отношением сходства понятие «быть одногодком» (в смысле «х родился в том же году, что и у»), удовлетворяющее аксиоме транзитивности?

Более правомерно рассматривать отношение сходства как более общее по сравнению с отношением эквивалентности. Всякое отношение эквивалентности есть, одновременно, и отношение сходства (поскольку любая эквивалентность удовлетворяет аксиомам сходства). Обратное утверждение не верно. Не всякое сходство является эквивалентностью (ведь существуют не транзитивные отношения сходства).

Применительно к характеристикам соответствующих теорий, напротив, более богатой следствиями окажется теория эквивалентности, а не теория сходства. Ведь каждое утверждение о сходстве A, выведенное из аксиом сходства A1 и A2, после замены в выводе знака «≈» на знак «~» одновременно окажется выведенным в теории эквивалентности. Но не всё, что можно вывести в теории эквивалентности можно будет вывести (после обратной замены «~» на «≈») в теории сходства. Например, аксиома транзитивности A3 за один шаг выводима в теории эквивалентности, но не выводима за любое количество шагов в теории сходства. Доказательство последнего утверждения мы фактически дали выше, когда привели примеры транзитивных и не транзитивных отношений сходства. Если бы транзитивность выводилась в теории сходства, то всякое сходство было бы транзитивным, и мы не смогли бы построить пример не транзитивного сходства.

В самом деле, предположим, транзитивность выводится из аксиом A1 и A2 теории сходства. Тогда в этой теории будет теоремой формула транзитивности: $\vdash \forall x \forall y \forall z(((x \approx y) \,\&\, (y \approx z)) \rightarrow (x \approx z))$. Значит, в любом универсуме, на котором задано отношение сходства $\approx$, оно должно быть транзитивным. Но отношение «быть ровесником», заданное на универсуме людей, является отношением сходства (поскольку удовлетворяет аксиомам сходства). Однако данное отношение не транзитивно. Следовательно, транзитивность не является обязательным признаком сходства, и поэтому истинность аксиом A1 и A2 не исключает ложности формулы транзитивности. Иными словами, из A1 и A2 транзитивность *не следует*. А раз не следует, то и *не выводится*. В противном случае имели бы ситуацию вида $\Gamma \not\models A$, $\Gamma \vdash A$, что противоречит метатеореме $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Gamma \models A$.

§2. Аксиомы равенства

Всем известно бинарное отношение равенства. Мы тоже уже не раз использовали его в данной книге. Можно ли неявно определить понятие равенства посредством подходящей аксиоматической теории? На ум приходит рассмотренная в предыдущем параграфе теория эквивалентности. Совершенно очевидно, что равенство является рефлексивным, симметричным и транзитивным отношением, т.е. применительно к равенству должны быть истинны следующие формулы.

$\forall x(x = x)$

$\forall x \forall y((x = y) \rightarrow (y = x))$

$\forall x \forall y \forall z(((x = y) \& (y = z)) \rightarrow (x = z))$

Однако дальнейшие рассуждения показывают, что характеристика равенства как отношения эквивалентности, будучи совершенно правильной, тем не менее, явно недостаточна. Действительно, индивиды, эквивалентные друг другу по какому-то признаку, не обязаны быть равными. К примеру, композиторы Р.Вагнер и Дж.Верди оба родились в 1813 г., так что высказывание «Вагнер одногодок Верди» истинно. Поскольку отношение «x одногодок y» является отношением эквивалентности, воспользуемся введённым обозначением эквивалентности «~»: (Вагнер ~ Верди). Но отсюда никак не следует, что (Вагнер = Верди), т.е. что речь идёт об одном и том же индивиде. На самом деле это два разных человека. Впрочем, иногда может получиться, что и высказывание (a ~ b), и высказывание (a = b) вместе истинны. Скажем, Аристотель является одногодком Стагирита, т.е. (Аристотель ~ Стагирит), но, поскольку Аристотель и Стагирит – это два имени одного и того же индивида, можем одновременно утверждать (Аристотель = Стагирит). Важно то, что так бывает не всегда, поэтому истинность (a ~ b) не гарантирует истинности (a = b), и потому из (a ~ b) *не следует* (a = b).

Обратное имеет место: $((a = b) \rightarrow (a \sim b))$. Словесно, любые равные индивиды будут эквивалентными. Но в каком смысле эквивалентными? Мы видели, что за обозначением эквивалентности «~» могут скрываться различные конкретные реализации (само равенство «x = y», отношения «x одногодок y», «x имеет одинаковую успеваемость с y» и т.д.). Вот это, оказывается, неважно! Что бы конкретное ни подразумевалось под отношением ~, в силу равенства (a = b) и рефлексивности ~, один и тот же индивид, обозначенный разными именами a и b, в любом случае вступит в отношение эквивалентности с самим собой: (a ~ b).

Получается, что отношение равенства *сильнее* отношения эквивалентности в логическом смысле: из (a = b) *следует* (a ~ b), но из (a ~ b) *не следует* (a = b). Значит, для выражения равенства необходимо поискать такие аксиомы, которые бы усилили теорию.

В своё время немецкий философ Готфрид Лейбниц предложил решение проблемы, которое он назвал *принципом тождества неразличимых.* В вольном изложении этот принцип можно сформулировать так: *если всё, что можно сказать об одном индивиде, можно сказать о другом, и наоборот, то речь идёт об одном и том же индивиде, а не о двух индивидах.* Надо только уточнить, что означают слова «что-то сказать об индивиде». В логике что-то сказать об индивиде b – значит приписать b свойство или указать на отношение, в которое b вступает с другими индивидами.

Тогда получается, что принцип тождества неразличимых требует следующих действий. Исследуя индивиды a и b, необходимо проверить все предикаты вида A(x), где переменная x содержится свободно. Подчеркнём, что в A(x) другие переменные могут входит как свободно, так и не свободно. Например, A(x) может совпадать с формулой $B(x, x_1, x_2, ..., x_n)$, в которую, наряду с x, входят свободно переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ (такая формула выражает некоторое n+1-местное отношение). Пусть формулы A(a) и A(b) получаются из A(x) заменой всех вхождений переменной x на имена a и b соответственно.

Если найдётся предикат A(x) такой, что A(a), но $\neg$A(b), сразу заключаем: следовательно, $a \neq b$. (Попутно отметим, что случай A(b) и $\neg$A(a) разбирать не надо, т.к. из A(a) и $\neg$A(b) следует, что существует предикат B(x), для которого B(b), но $\neg$B(a); достаточно в качестве B(x) взять $\neg$A(x), что обеспечит $\neg$A(b) и $\neg\neg$A(a).)

Если же для любого предиката A(x) имеет место $A(a) \leftrightarrow A(b)$, то заключаем: следовательно, a = b.

Эта замечательная программа явного определения равенства наталкивается на одно препятствие: выше приведённое рассуждение использовало квантификацию не по индивидам, а по предикатам, что выводило его за границы логики первого порядка. Выход был найден в том, чтобы, отказавшись от попытки дать явное определение равенства в логике первого порядка, взять понятие равенства в качестве исходного, а затем аксиоматически описать его в неявном виде, по возможности удержав существенные характеристики равенства, выявленные ещё Лейбницем.

Пусть $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ — любая формула, содержащая переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ свободно, и не содержащая переменных $y_1, y_2, ..., y_n$. Через $A(y_1, y_2, ..., y_n)$ обозначим формулу, полученную из $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ заменой каждого вхождения переменной x_i на переменную y_i $(1 \leq i \leq n)$.

Аксиомами равенства являются следующие формулы.

A1 $\forall x(x = x)$

A2 $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \forall y_1 \forall y_2 ... \forall y_n((x_1 = y_1 \,\&\, x_2 = y_2 \,\&\, ... \,\&\, x_n = y_n) \rightarrow (A(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow A(y_1, y_2, ..., y_n))$

С содержательной точки зрения, первая аксиома утверждает рефлексивность равенства: каждый индивид равен самому себе. Вторая аксиома идейно восходит к принципу тождества неразличимых. Она утверждает, что если индивиды $x_1, x_2, ..., x_n$ вступают в отношение A, то равные им индивиды $y_1, y_2, ..., y_n$ также окажутся в отношении A. Какие конкретно отношения взять в качестве A — зависит только от выразительных возможностей языка. Ведь смысл аксиомы A2 в том, что A — любое отношение, выразимое в языке, хотя в самой аксиоме незаконный оборот «любое отношение» не используется. В действительности A2 является схемой аксиом, потенциально содержащей бесконечное количество конкретных вариантов этой аксиомы.

Читатель, конечно, уже обратил внимание, что в списке аксиом равенства отсутствуют аксиомы симметричности и транзитивности. Беспокоиться не надо, потому что теперь эти аксиомы выводятся в качестве следствий аксиом равенства. Продемонстрируем это.

$\vdash \forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$

1.	$x = y$	— доп.
2.	$\forall x(x = x)$	— A1
3.	$x = x$	— 2, $\forall$у
4.	$\forall x \forall y((x = y \,\&\, x = x) \rightarrow (x = x \rightarrow y = x))$	— A2
5.	$\forall y((x = y \,\&\, x = x) \rightarrow (x = x \rightarrow y = x))$	— 4, $\forall$у
6.	$((x = y \,\&\, x = x) \rightarrow (x = x \rightarrow y = x))$	— 5, $\forall$у
7.	$(x = y \,\&\, x = x)$	— 1, 3, &в
8.	$(x = x \rightarrow y = x)$	— 7, 6, $\rightarrow$у
9.	$y = x$	— 3, 8, $\rightarrow$у
10.	$x = y \vdash y = x$	— 1-9, $\vdash$в
11.	$\vdash (x = y \rightarrow y = x)$	— 10, $\rightarrow$в
12.	$\vdash \forall y(x = y \rightarrow y = x)$	— 11, $\forall$в

13. $\vdash \forall x \forall y(x = y \to y = x)$ — 12, ∀в

В данном доказательстве ключевой шаг — это шаг номер 4. В варианте аксиомы А2 $\forall x \forall y((x = y \ \& \ x = x) \to (x = x \to y = x))$ вместо x_1 стоит x, вместо y_1 — y, вместо x_2 — снова x, вместо y_2 — опять x. Роль формулы $A(x_1, x_2)$ играет, стало быть, формула $(x = x)$, а роль формулы $A(y_1, y_2)$ — формула $(y = x)$. Мы уже подчёркивали, что формула А в аксиоме А2 может быть любой, значит, в том числе А может быть и формулой равенства. Дальнейшее рассуждение — чистая логика.

$\vdash \forall x \forall y \forall z((x = y \ \& \ y = z) \to x = z)$

1.	$(x = y \ \& \ y = z)$	— доп.
2.	$x = y$	— 1, &у1
3.	$y = z$	— 1, &у2
4.	$\vdash (x = y \to y = x)$	— док.
5.	$(x = y \to y = x)$	— 4, ⊢у
6.	$y = x$	— 2, 5, →у
7.	$(y = x \ \& \ y = z)$	— 6, 3, &в
8.	$\forall y \forall x \forall z((y = x \ \& \ y = z) \to (y = y \to x = z))$	— А2
9.	$\forall x \forall z((y = x \ \& \ y = z) \to (y = y \to x = z))$	— 8, ∀у
10.	$\forall z((y = x \ \& \ y = z) \to (y = y \to x = z))$	— 9, ∀у
11.	$((y = x \ \& \ y = z) \to (y = y \to x = z))$	— 10, ∀у
12.	$(y = y \to x = z)$	— 7, 11, →у
13.	$\forall x(x = x)$	— А1
14.	$y = y$	— 13, ∀у
15.	$x = z$	— 14, 12, →у
16.	$(x = y \ \& \ y = z) \vdash x = z$	— 1-15, ⊢в
17.	$\vdash ((x = y \ \& \ y = z) \to x = z)$	— 16, →в
18.	$\vdash \forall z((x = y \ \& \ y = z) \to x = z)$	— 17, ∀в
19.	$\vdash \forall y \forall z((x = y \ \& \ y = z) \to x = z)$	— 18, ∀в
20.	$\vdash \forall x \forall y \forall z((x = y \ \& \ y = z) \to x = z)$	— 19, ∀в

На этот раз ключевым шагом доказательства был шаг номер 8. В варианте аксиомы А2 $\forall y \forall x \forall z((y = x \ \& \ y = z) \to (y = y \to x = z))$ вместо x_1 стоит y, вместо y_1 — x, вместо x_2 — снова y, вместо y_2 — z. Роль формулы $A(x_1, x_2)$ играет формула $(y = y)$, а роль формулы $A(y_1, y_2)$ — формула $(x = z)$.

Рассматривая понятие эквивалентности, мы отметили, что каждое заданное на универсуме рассуждений отношение эквивалентности делит универсум, порождает его разбиение на непустые непересекающиеся подмножества. Раз, как мы только что доказали, равенство в самом деле является отношением эквивалентности, оно также должно порождать разбиение соответствующего универсума. Что же это за разбиение? В предыдущих примерах с эквивалентностями случалось так, что $(a \sim b)$, но $(a \neq b)$. Семантически это означает, что разные индивиды a и b попали в один и тот же член деления. Но в случае такой специфической эквивалентности, как равенство, этого быть не может! Получилось бы, что $a = b$ (потому что a и b попали в один и тот же член деления) и одновременно $a \neq b$, что противоречиво. Значит, невозможно, чтобы равенство привело к разбиению, в котором есть член деления, содержащий два различных (не говоря уже о большем количестве) индивида. Но и пустыми члены деления быть не могут. Следовательно, остаётся одна единственная возможность: *равенство порождает разбиение, каждый член которого содержит ровно один индивид.*

Так и должно быть, потому что каждый индивид равен только самому себе и не равен никакому другому индивиду, тогда как различных эквивалентных индивидов может быть сколько угодно. Таким образом, равенство – это такое отношение эквивалентности на универсуме, которое даёт максимально дробное его разбиение. Процесс дальнейшего разбиения здесь невозможен. Все остальные, отличные от равенства, отношения эквивалентности делят универсум на части, по крайней мере одна из которых делима далее.

Аксиоматическая теория равенства играет особую роль при построении других теорий. Чаще всего новые аксиоматические теории строятся как расширение теории равенства. Неплохо, в самом деле, рассуждая об индивидах разной природы, заранее иметь возможность решать, равны друг другу индивиды a и b, или не равны. На этом основании теорию равенства нередко относят к чистой логике, а не к прикладной её части. Тогда минимальной теорией должно считаться не чистое исчисление предикатов, – в нашем конкретном случае K_N, – а исчисление предикатов с равенством – $K_{N=} =_{Df} K_N + A1 + A2$. Однако, как вы убедились на примере теорий эквивалентности и сходства, теории могут обходиться без отношения равенства. А вот создать теорию без теории логического вывода (K_N или какой-то ещё) невозможно.

§3. Теории порядка

Тем не менее, повторим, на практике новые аксиоматические теории чаще строятся на базе исчисления предикатов с равенством $K_{N=}$, а не на основе чистого исчисления предикатов K_N. Теории порядка тоже строятся, исходя из $K_{N=}$. Есть две разновидности порядка – строгий и нестрогий. Когда мы записываем $x < y$, то подразумеваем, что x строго меньше y, но когда используется запись $x \leq y$, то, наряду с $x < y$, не исключается возможность $x = y$. Значит, смысл нестрогого порядка сводится к дизъюнкции: $x \leq y \leftrightarrow_{Df} x < y \vee x = y$. Можно, наоборот, определить строгий порядок через нестрогий и равенство: $x < y \leftrightarrow_{Df} x \leq y \;\&\; \neg(x = y)$. (Вместо $\neg(x = y)$ удобнее использовать $x \neq y$).

Однако это не приблизило нас к уяснению того, что понимается под отношением порядка. Здесь требуется предъявить соответствующие аксиомы, которые мы дадим отдельно для строгой и нестрогой разновидности рассматриваемого понятия. (Вы понимаете, конечно, что в данном контексте слово «нестрогий» не означает «неточный» или «приблизительный», поскольку оба порядковых отношения будут определены предельно строго.)

Аксиомы теории нестрогого частичного порядка $T_{\leq}$.

A1. $\forall x(x \leq x)$

A2. $\forall x \forall y((x \leq y \;\&\; y \leq x) \rightarrow x = y)$

A3. $\forall x \forall y \forall z((x \leq y \;\&\; y \leq z) \rightarrow x \leq z)$

Первая и третья аксиомы – это хорошо знакомые аксиомы рефлексивности и транзитивности. Вторая аксиома называется аксиомой *антисимметричности.*

Аксиомы теории строгого частичного порядка $T_{<}$.

B1. $\forall x \neg(x < x)$

B2. $\forall x \forall y \forall z((x < y \;\&\; y < z) \rightarrow x < z)$

Аксиома B2 – всё та же транзитивность, а аксиома B1 называется аксиомой *антирефлексивности.*

Между теориями $T_{\leq}$ и $T_{<}$ существенной разницы нет. Чтобы убедиться в этом, достаточно присоединить к этим теориям соответствующие явные определения одного отношения порядка через другое в качестве новых аксиом. Тогда в расширенной теории нестрогого порядка будет выводимо всё, что выводимо в теории строгого порядка, и, наоборот, в расширенной теории строгого порядка получим все теоремы теории нестрогого порядка.

Уточним сказанное. Добавим к $T_{\leq}$ новую аксиому

A4. $\forall x \forall y(x < y \leftrightarrow (x \leq y \ \& \ x \neq y))$,

а к теории $T_{<}$ — новую аксиому

B3. $\forall x \forall y(x \leq y \leftrightarrow (x < y \lor x = y))$.

При этом принимаем определение: формула $(A \leftrightarrow B)$ есть сокращение формулы $((A \to B) \ \& \ (B \to A))$. Поскольку в K_N имеются правила &у1 и &у2, в силу которых $((A \to B) \ \& \ (B \to A)) \vdash (A \to B)$ и $((A \to B) \ \& \ (B \to A)) \vdash (B \to A)$, с эквиваленцией $(A \leftrightarrow B)$ в выводах можно обращаться или как с импликацией $(A \to B)$, или как с импликацией $(B \to A)$ (в зависимости от ситуации).

Мы утверждаем, что из теории $T_{\leq}$ + A4 выводима теория $T_{<}$, а из теории $T_{<}$ + B3 выводима теория $T_{\leq}$. Чтобы доказать, что из аксиоматической теории T_1 выводится аксиоматическая теория T_2, необходимо и достаточно вывести в T_1 все аксиомы T_2. Значит, требуется в $T_{\leq}$ + A4 доказать B1 и B2, а в $T_{<}$ + B3 доказать A1, A2 и A3. Выведем, например, в теории $T_{\leq}$ + A4 формулу B1.

В $T_{\leq}$ + A4 $\vdash \forall x \neg(x < x)$.

1.	$x < x$	— доп.
2.	$\forall x \forall y(x < y \leftrightarrow (x \leq y \ \& \ x \neq y))$	— A4
3.	$\forall y(x < y \leftrightarrow (x \leq y \ \& \ x \neq y))$	— 2, ∀у
4.	$(x < x \leftrightarrow (x \leq x \ \& \ x \neq x))$	— 3, ∀у
5.	$(x \leq x \ \& \ x \neq x)$	— 1, 4, →у
6.	$x \neq x$	— 5, &у2
7.	$x < x \vdash x \neq x$	— 1-6, ⊢в
8.	$\forall x(x = x)$	— акс. равенства
9.	$x = x$	— 8, ∀у
10.	$x < x \vdash x = x$	— 1, 8, 9, ⊢в
11.	$\vdash \neg(x < x)$	— 10,→в
12.	$\vdash \forall x \neg(x < x)$	— 11, ∀в

Оставшиеся доказательства в $T_{\leq}$ + A4 и в $T_{<}$ + B3 попытайтесь построить самостоятельно.

Полученный выше результат позволяет без ущерба для сути дела сосредоточиться лишь на одном понятии порядка. Мы предпочитаем понятие строгого порядка.

Приведём несколько конкретных реализаций строгого порядкового отношения <. Если в аксиомах B1 и B2 заменить символ «<» на слово «младше», то универсум людей будет упорядочен отношением «x младше y». Действительно, никто не может быть младше самого себя, так что B1 выполнена. И всякий раз, когда x младше y, а y младше z, x окажется младше z, что обеспечивает транзитивность, т.е. B2. Бинарные отношения «x легче y», «x короче y», «x глупее y», «x слабее y» также являются отношением порядка.

Возможно, для кого-то покажется неожиданным, что аксиомам порядка будут удовлетворять и обратные к приведённым отношения «старше», «тяжелее», «длиннее», «умнее», «сильнее». Конечно, если формулу $(a < b)$ проинтерпретировать как «a глупее b», то уже нельзя утверждать, что $(b < a)$, т.е. что «b глупее a». Для обратных отношений необходимо ввести другой символ. Если отношение порядка обозначено символом «$<$», то обычно обратное отношение обозначают символом «$>$».

Нетрудно доказать, используя семантические соображения, что если отношение $(x < y)$ есть отношение порядка, то и обратное отношение $(y > x)$ также будет отношением порядка. В самом деле, обратное отношение $>$ получается из отношения $<$ заменой каждой упорядоченной пары $<a, b> \in <$ на упорядоченную пару $<b, a> \in >$. Но в силу $\forall x \neg(x < x)$, в $<$ нет пар вида $<a, a>$, так что таким парам просто неоткуда взяться и в $>$. Отсюда $\forall x \neg(x > x)$ истинно. Пусть теперь выполнено $<a, b> \in <$, $<b, c> \in <$. По транзитивности получаем, что пара $<a, c> \in <$. Значит, обратные пары $<b, a>$, $<c, b>$ и $<c, a> \in >$, а это и даёт транзитивность $<c, b>$, $<b, a>$, $<c, a>$. Поскольку данное рассуждение верно для любых индивидов, высказывание $\forall x \forall y \forall z((x > y \ \& \ y > z) \rightarrow x > z)$ также истинно.

Теория линейного порядка получается из теории частичного порядка добавлением следующей *аксиомы связности* B3.

B3. $\forall x \forall y(x < y \vee y < x \vee x = y)$

Смысл этой аксиомы очевиден. Она утверждает, что для каждой пары индивидов x и y из универсума имеется три возможности: либо $x < y$, либо $y < x$, либо $x = y$. В этом случае индивиды универсума действительно выстроятся в линию.

Представим, например, что в роте для любой пары солдат x и y выполнено следующее условие: либо x ниже y, либо y ниже x, либо $x = y$. В таком случае солдат этой роты можно однозначно выстроить по росту в одну линию. В случае, если есть два или более солдат одинакового роста, то однозначного построения по росту не получится. Этим, собственно говоря, проиллюстрировано различие между линейным и частичным порядком, в котором нарушается аксиома связности. Последняя ситуация означает существование индивидов, *не сравнимых* по данному отношению. О двух солдатах x и y, имеющих одинаковый рост, нельзя сказать ни того, что x ниже y, ни того, что y ниже x, ни того, что x = y.

Все рассмотренные в этом параграфе отношения порядка в реальности являются *частичными*, *но не линейными*. Однако, человеческий ум склонен к упрощению, и видит линейный порядок там, где его вовсе не существует. Выстраивание в линию по росту солдат одинакового роста – не самый плохой пример недомыслия. Гораздо хуже, когда в группе людей начинают искать самого хорошего или самого плохого, самого умного или самого глупого, самого красивого или самого уродливого. Предпосылкой таких поисков является безосновательная идея, что по данным качествам люди обязаны выстроиться в линию, как солдаты на плацу. А затем, дескать, можно выбрать крайних. Но в действительности крайних может и не быть! Даже в группе из двух человек может не быть, например, самого умного или самого красивого. Просто эти два человека несравнимы по названным качествам: допустим, каждый из них яркая личность, на свой манер умная и красивая. На наш взгляд, немного в мире найдётся более глупых мероприятий, чем конкурсы красоты.

Всё же имеется достаточно много ситуаций, когда применение линейного порядка становится осмысленным. В математике натуральные, отрицательные, целые, рациональные и действительные числа упорядочены линейным образом (неважно, отношением меньше или отношением больше). А вот отношение включения $\subset$ одного множества чисел в другое множество чисел оказывается отношением не линейного, а только частичного порядка. Так, множества {0, 1}, {0, 1, 2} и {0, 1, 3} выполняют включения $\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}$ и $\{0, 1\} \subset \{0, 1, 3\}$, но ни $\{0, 1, 2\} \subset \{0, 1, 3\}$, ни $\{0, 1, 3\} \subset \{0, 1, 2\}$, ни $\{0, 1, 2\} = \{0, 1, 3\}$ не выполняются.

Иногда бывает не вполне понятно, как упорядочены реальные совокупности. Скажем, вряд ли есть основания сомневаться в том, что время упорядочивает события. Но какой порядок реализован природой на множестве мгновений времени? Обычно для простоты его считают линейным. Для многих научных и практических задач этого достаточно. Например, коллизия с чашкой, которая разбилась и упала, теперь разрешается легко. Надо взять высказывания «Чашка разбилась в момент времени t» и «Чашка упала в момент времени s», добавив к ним: «И при этом s *раньше* t».

Темпоральное отношение *раньше* (двойственным образом, *позже*) является важнейшим для науки и практики отношением порядка, но остаётся, тем не менее, загадочным до сих пор. Если допустить, что это отношение линейно, то все мгновения времени выстроятся в линию. Тогда будущее полностью предопределено, и ничего изменить в нашей судьбе нельзя. Может быть, в реальности время не образует линии, а скажем, ветвится в будущее в каждом моменте, обеспечивая в каждое мгновение альтернативность будущего? В случае утвердительного ответа потребуется к имеющимся аксиомам частичного порядка добавить следующую аксиому.

B′3. $\forall x \exists y \exists z (x < y \,\&\, x < z \,\&\, \neg(y < z) \,\&\, \neg(z < y) \,\&\, y \neq z)$

Аксиома B′3 противоречит аксиоме связности B3, поэтому в зависимости от решаемых задач выбрать нужно что-то одно.

§4. Теория родственных отношений

В книге «Логика и компьютер» (М., 1996) утверждается: «Теория биологического родства очень проста. Область исследуемых объектов – люди.» В строящейся в этой книге теории имеются два исходных предиката: $P(x,y)$ – x родитель y и $M(x)$ – мужчина x.

Даются явные определения некоторым новым понятиям.

«Женщина»: $W(x) \leftrightarrow \neg M(x)$

«Отец»: $O(x,y) \leftrightarrow P(x,y) \,\&\, M(x)$

«Мать»: $M(x,y) \leftrightarrow P(x,y) \,\&\, W(x)$

Далее принимаются три аксиомы

1. Ни один человек не является родителем самого себя

$$\forall x \neg P(x,x)$$

2. Каждый человек имеет единственного отца

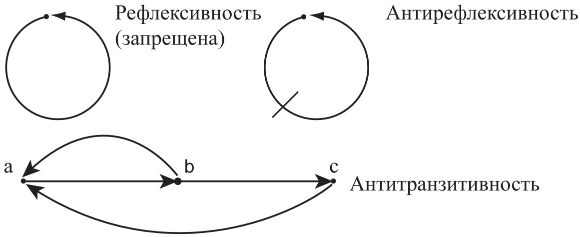
$$\forall y \exists! x O(x,y)$$

3. Каждый человек имеет единственную мать

$$\forall y \exists! x M(x,y)$$

В §6 предыдущей главы определение квантора $\exists!$ давалось с использование равенства, так что опять исходим из исчисления предикатов с равенством $K_{N=}$.

Эта теория, безусловно, проста. Но теория должна не только что-то разрешать, но и что-то запрещать. И чем больше теория запрещает, тем она лучше. Наша же теория разрешает коечто лишнее.



В самом деле, она не исключает ситуаций, изображенной в нижней части рисунка: P(a,b), P(b,c), но одновременно P(b,a) и P(c,a), т.е. сын (или дочь) является родителем родителя, отца или матери, а внук (или внучка) является родителем деда или бабушки! Я предвижу возражение авторов книги: существование ситуации P(a,b) & P(b,c) & P(b,a) & P(c,a) нельзя доказать. Но она *не запрещена*. Если бы она была доказуема, теория была бы просто ложной, не соответствующей фактам. А так теория оказалась слишком простой, чтобы отразить существенные особенности родственных отношений людей. Она не ложна, а недостаточно сложна. Немного подправим теорию. Вместо неопределяемого явно понятия «родитель» – P(x,y) введем понятие «предок» – П(x,y) и добавим следующие аксиомы.

4. Никто не является предком самого себя

$$\forall x \neg П(x,x)$$

5. Предок моего предка является и моим предком

$$\forall x \forall y \forall z (П(x,z) \ \& \ П(z,y) \rightarrow П(x,y))$$

(Как видим, отношение П(x, y) является отношением строгого частичного порядка.)

Теперь отношение «родитель» можно определить в терминах отношения «предок»

$$P(x,y) \leftrightarrow П(x,y) \ \& \ \neg\exists z (П(x,z) \ \& \ П(z,y))$$

Иными словами, родитель – это непосредственный предок.

Теперь ситуация P(a,b) & P(b,c) & P(b,a) & P(c,a) *запрещена*. Действительно, допустим, что P(a,b) & P(b,a). По только что принятому определению, всякий родитель одновременно является предком своего потомка. Поэтому из P(a,b) & P(b,a) немедленно следует, что П(a,b) & П(b,a). В силу 5 аксиомы, имеем П(a,b) & П(b,a) → П(a,a). По правилу →у получаем П(a,a), что противоречит аксиоме 4. Следовательно, наше допущение привело к противоречию, значит, оно не верно. Такой ситуации быть не может.

Допустим теперь $P(a,b)$ & $P(b,c)$ & $P(c,a)$. Вновь из $P(a,b)$ & $P(b,c)$ & $P(c,a)$ следует $\Pi(a,b)$ & $\Pi(b,c)$ & $\Pi(c,a)$. Значит, $\Pi(a,b)$ & $\Pi(b,c)$ и $\Pi(c,a)$. По 5 аксиоме, $\Pi(a,b)$ & $\Pi(b,c) \rightarrow \Pi(a,c)$. По $\rightarrow$у имеем $\Pi(a,c)$. Поскольку есть $\Pi(a,c)$ и $\Pi(c,a)$, имеем также$\Pi(a,c)$ & $\Pi(c,a)$. Вновь используя аксиому 5, получаем $\Pi(a,c)$ & $\Pi(c,a) \rightarrow \Pi(a,a)$. По $\rightarrow$у получаем $\Pi(a,a)$, что противоречит аксиоме 4.

Кстати говоря, аксиома 1 теперь лишняя, т.к. она выводится из четырех оставшихся. Допустим, что для некоторого a $P(a,a)$. Значит, $\Pi(a,a)$, что противоречит аксиоме 4. Отсюда $\forall x \neg P(x,x)$, что и требовалось.

Оставляя в стороне использованные логические понятия, обратимся к дескриптивному словарю. Он содержит определенные аксиоматически (т.е. неявно) понятия «предок» и «мужчина», а также явно определенные через них понятия «родитель», «женщина», «отец» и «мать». Эмпирические это понятия или теоретические? *Теоретические*. Теория ничего не говорит о том, какие конкретные индивиды существуют, кто их родители и кто более отдаленные предки. Кроме того, область индивидов, постулируемая теорией, *бесконечна*! В самом деле, аксиомы гарантируют существование для каждого индивида ровно двух родителей (мужчину и женщину). Но каждый из родителей имеет по два своих родителя и так далее, ad infinitum. Получается, что число предков, родителей, мужчин, женщин, отцов, матерей оказывается бесконечным. Бесконечность же не наблюдаема! Значит, все эти понятия теоретические.

Однако в реальности существует только конечное число индивидов. Означает ли это, что наша теория оказалась не только неудачной, но и ложной? Ни то, ни другое. При построении теории мы сплошь и рядом отвлекаемся, *абстрагируемся* от тех или иных аспектов реальности. В нашем случае мы абстрагировались от *количественных* свойств отношения родства и сосредоточились на его *структурных* свойствах. В результате абстрагирования мы сконструировали бесконечность, *создали* ее при помощи творческого воображения! Судите теперь сами, можно ли объяснить эту абстракцию отбрасыванием отдельных аспектов чувственного опыта, как полагали сенсуалисты. Заметим, что бесконечность возникла в наших построениях совершенно естественным образом. Уверяю вас, что попытка избавиться от нее резко усложнила бы нашу теорию (вот одна из проблем: количество индивидов конечно, но точное их число неопределённо – как быть?; еще проблема: если число людей конечно, появятся люди, не имеющие родителей, что, мягко говоря, странно). Сомневающимся предлагаю попробовать описать отношение родства без введения абстракции бесконечности! Вывод: *абстрактные теоретические понятия облегчают нам постижение реальности*.

Чтобы наша теория описывала реальность, необходимо ввести эмпирические понятия и соотнести их с теоретическими посредством *правил соответствия*. Сделать это можно приблизительно следующим образом. Сначала, используя *юридические* процедуры, определим, какие конкретные индивиды находятся в отношении родства, являются мужчинами или женщинами. На этом пути можно получить, например, *эмпирическое* понятие «предок$_э$»: x является предком y, если и только если предъявлены такие-то и такие-то документы (некоторые уверяют, что их предки – люди благородного происхождения – предоставьте эмпирические (юридические в данном случае) доказательства!). Затем можно ввести *правило соответствия* $\forall x \forall y(\Pi_э(x,y) \rightarrow \Pi(x,y))$. После этого все, что известно теоретического о предках, становится применимым к реальным людям. Конечно, область родства слишком проста, чтобы всерьез заниматься построением ее теории. Она нам понадобилась в качестве модельного примера. Но в более сложных случаях без теории не обойтись.

Научна ли эта теория? Да, поскольку ее в принципе можно опровергнуть. Например, осуществление клонирования с использованием соматической клетки женщины опровергнет аксиому, что каждый человек имеет отца. Истинна ли эта теория? По крайней мере, в отношении исторического прошлого она не вызывает сомнений. Ведь до сих пор не было ни одного опровергающего её факта.

ГЛАВА 7. ВЫЧИСЛИМОСТЬ И ЛОГИКА

В предыдущей главе был рассмотрен *аксиоматический метод* задания теорий. Он состоял в принятии ряда утверждений в качестве аксиом, с последующим выведением следствий из аксиом. Теория при таком подходе представляла из себя множество высказываний, замкнутое относительно выводимости. Существует альтернативный метод получения теорий, когда исходят не из высказываний, а из некоторого строго заданного набора индивидов, с которыми разрешается проводить точно определённые операции. Это так называемый *генетический метод* построения теорий. В данной главе генетическим методом будет построена теория вычислимости. Исходными индивидами здесь являются натуральные числа, а операции с ними будет осуществлять просто устроенный логический компьютер, все допустимые действия которого будут строго описаны.

§1. Натуральный универсум и кодирование

Множество натуральных (т.е. множество целых положительных чисел, к которому добавлено число 0) обозначим через N. Арифметические операции с натуральными числами ещё называют *функциями*. Всем известны знаменитые четыре операции сложения, умножения, вычитания и деления. Сложение, например, есть двухместная функция, обозначаемая символом «+», которая каждой упорядоченной паре натуральных чисел $<x, y>$ сопоставляет натуральное число, являющееся суммой x и y. Записывая функцию в общем виде, обычно знак функции ставят впереди, подобно тому, как впереди ставят знак отношения. Тогда результат сложения чисел x и y запишется в виде $+(x, y)$. В привычной форме записи это выражение перепишется в виде $x + y$. Знак функции ставят впереди потому, что функции могут быть знаками n-местных операций, которые производится не с парой чисел, а с упорядоченной n-кой чисел: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Примером одноместной функции будет функция прибавления единицы s, которая каждому натуральному числу x сопоставляет число $s(x) =_{Df} x +1$. Нетрудно придумать пример более чем двухместной функции. Определим функцию $\times_3$ следующим образом: $\times_3(x, y, z) =_{Df} x \times y \times z$. Таким путём получили трёх местную функцию $\times_3$. И т.д.

Важно подчеркнуть, что наш числовой универсум N исчерпывается натуральными числами. Но некоторые операции выводят нас за пределы универсума N. Например, результат вычитания, в отличие от сложения и умножения, уже не всегда принадлежит области натуральных чисел. Например, $(4 - 3) \in N$, но $(3 - 4) \notin N$. В этой связи различают частичные и тотальные функции. Функция называется *частичной*, если результат её применения в некоторых случаях (а, может быть, и во всех случаях) не определён. Если же функция всегда приводит к определённому результату, то такую функцию назовём *тотальной*. В универсуме N сложение и умножение являются тотальными функциями, а вычитание и деление – частичными.

Выбор универсума N в качестве исходного обусловлен многими причинами. Одна из них – это необычайное богатство этого (казалось бы, простого) универсума, позволяющего в числовой форме представлять самые разнообразные вещи. Такое представление осуществляется посредством кодирования. Пусть дан универсум U. *Кодирование* U состоит во взаимно однозначном эффективном сопоставлении каждому объекту $u \in U$ натурального числа $n \in N$. *Эффективность* означает, что должны быть выполнены два условия. Во-первых, по предъявлению u должно однозначно вычисляться n. Во-вторых, по любому n однозначно определяется, является ли n обозначением какого-либо u, и если является, то это u должно быть предъявлено.

Понять, что такое кодирование, проще на конкретном примере. Пусть U – *множество всех формул логики высказываний*. Осуществим кодирование универсума U. Делать это можно разными способами. Мы выберем следующий. Сопоставим каждому знаку алфавита языка логики высказываний натуральное число.

$\neg$ – 1
& – 11
$\vee$ – 111
$\rightarrow$ – 1111
$\leftrightarrow$ – 11111
(– 111111
) – 1111111
p – 11111111
q – 111111111
r – 1111111111
s – 11111111111
p_1 – 111111111111
p_2 – 1111111111111
. . . .

Каждый без труда продолжит нумерацию пропозициональных переменных. Произвольная пропозициональная переменная p_n получит номер, составленный из n единиц и ещё одиннадцати единиц. Отметим, что это эффективная нумерация, поскольку мы не только умеем любому символа алфавита однозначно сопоставить номер, но и можем по произвольному числу n определить, будет ли n номером какого-либо символа алфавита: будет, если цифра n состоит из одних единиц, и не будет, если цифра n содержит отличные от единицы цифры.

Каждая формула A логики высказываний составлена из символов алфавита a_1, a_2, ..., a_n, которым уже сопоставлены натуральные числа m_1, m_2, ..., m_n. Эффективно сопоставим формуле A число следующим образом: m_10m_20 ... $0m_n$. Иными словами, запишем число, которое получается, если выписывать подряд слева направо номера символов формулы A, разделяя их цифрой 0.

Вычислим, например, номер формулы $(\neg p \vee p_2)$. Она составлена из символов с номерами 111111, 1, 11111111, 111, 1111111111111, 1111111. Значит,

$(\neg p \vee p_2)$ – 11111101011111111011101111111111111101111111.

По произвольному числу n можно эффективно определить, будет ли n кодировать некоторую формулу логики высказываний. Ясно, например, что число 11120444 ничего не кодирует, потому что в его записи использованы цифры 2 и 4, отличные от 1 и 0. Кодирует ли формулу число 1111110101111111? Проверим. Первые шесть единиц кодируют левую скобку (, одна единица ¬, последние восемь единиц p. Получили выражение (¬p, не являющееся формулой. Рассмотрим число 10111111111. Его переводом будет выражение ¬q, являющееся формулой.

Аналогичным способом можно закодировать множество формул логики предикатов (правда, технически это более сложно, чем для логики высказываний). Но кодируются не только множества формул, но и множества *конечных последовательностей* формул. Например, в случае логики высказываний каждой последовательности формул вида A_1, A_2, ..., A_n сопоставим число следующим способом. Сначала вычислим коды формул A_1, A_2, ..., A_n. Получим последовательность чисел m_1, m_2, ..., m_n. Теперь соединим эти числа посредством двух нулей подряд: m_100m_200 ... $00m_n$. Ясно, что описанное сопоставление будет эффективным.

Эффективное сопоставление объекту числа – это *кодирование*, а обратный процесс перехода от числа к объекту – это *декодирование*. Не каждый универсум U можно кодировать, однако не счесть примеров интересных универсумов, которые поддаются кодированию. Смысл кодирования, его предназначение заключается в том, чтобы заменить рассуждения об индивидах из U вычислениями на натуральных числах. Это позволяет сводить многообразие вещей к числам. Реальные компьютеры, обрабатывающие текстовую, графическую и звуковую информацию, в действительности кодируют эту информацию, переводя её в числовую форму, производят соответствующие вычисления, а затем декодируют результаты вычислений, превращая их в текст, графику или звук. Кодирование понимают и в более широком смысле, связанном с любым эффективным переводом информации из одной формы в другую. Кодированием и декодированием информации занимаются спецслужбы, желающие информацию скрыть. Передача звуковой информации по телефонным каналам требует кодирования и декодирования. Телевизионные картинки кодируются и передаются в эфир с тем, чтобы быть декодированными в телевизорах. И т.д.

§2. Логический компьютер

Рассмотренные арифметические функции определяются посредством указания правил их вычисления. Применение этих правил не требует изобретательности и мук творчества. Все, что требуется — это неукоснительное следование инструкциям. В таких случаях говорят, что задан алгоритм вычисления функции или что функция является вычислимой.

Вам, возможно, интуитивно понятно, что такое алгоритмическое предписание или алгоритм. Попробуйте, опираясь на интуицию, ответить, будет ли вычислимой следующая функция g(n).

Но прежде предположим, что каждой формуле исчисления предикатов эффективно сопоставлено натуральное число таким образом, что разным формулам соответствуют разные числа и по любому натуральному числу можно узнать, кодирует ли оно какую-нибудь формулу исчисления предикатов.

$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ является номером формулы и эта формула} \\ & \text{является теоремой исчисления предикатов;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

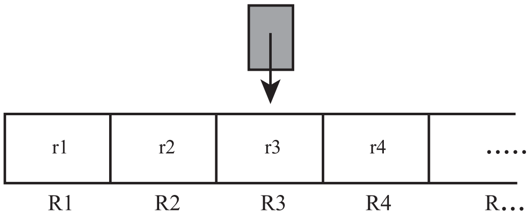
Итак, вычислима ли функция g? Установлено, что существует механическая процедура или алгоритм для последовательного перебора всех теорем исчисления предикатов. Примем это утверждение на веру. Теперь напрашивается следующая процедура вычисления g.

При заданном n определим, является ли n номером формулы исчисления предикатов. Если не является, то $g(n) = 0$ и вычисления закончены. В противном случае n кодирует некоторую формулу A. Применим механизм порождения теорем исчисления предикатов. Если среди теорем встретится формула A, то $g(n) = 1$ и вычисления завершены; если же формула A не встретится среди теорем исчисления предикатов, положим $g(n) = 0$.

Недостатком этой процедуры является то обстоятельство, что если для некоторой формулы A с номером n не существует доказательства в исчислении предикатов, то в процессе перебора теорем исчисления предикатов A не появится никогда. Но на каждом шаге процесса перебора теорем перед нами будет лишь конечный набор теорем, а бесконечное их число еще предстоит вычислить. Поскольку теоретически доказано, что нет эффективного метода, позволяющего за конечное число шагов по виду формулы определить, будет ли она теоремой исчисления предикатов, остается лишь надеяться, что исследуемая формула в конце концов появится в процессе перебора. Однако, если она не теорема, ждать придётся бесконечно долго и мы, таким образом, не сможем закончить вычисления и записать $g(n) = 0$. Следует ли из этого, что не существует алгоритма вычисления функции g, т.е. что она не является вычислимой функцией?

Итак, понятие вычислимой функции нуждается в уточнении, которое будет осуществлено в терминах идеального вычислительного устройства или компьютера. От реальных ЭВМ данный компьютер будет отличаться тем, что ограничения на размеры обрабатываемых чисел и объемы памяти для него сняты. Но программы, выполняемые этим компьютером, не будут особо отличаться от обычных компьютерных программ. В частности, все программы будут конечными.

Идеальный компьютер, с которым нам предстоит работать, называется машиной с неограниченными регистрами (МНР); его также называют адресной машиной (RAM). МНР содержит бесконечное число регистров или ячеек памяти, обозначаемых через R1, R2, R3..., Rn, ... Каждый из регистров Ri в любой момент времени содержит некоторое натуральное число, обозначаемое через переменную r_i. Кроме того, имеется пишущая головка, которая, перемещаясь от регистра к регистру, может изменять содержимое регистра, выполняя некоторые команды или инструкции. Графически МНР можно изобразить следующим образом.



Команды, выполняемые пишущей головкой, очень просты и сводятся к следующим типам.

Команда обнуления. Для каждого $n \in N$ может быть выполнена команда обнуления Z(n). Команда Z(n) заменяет содержимое регистра Rn на 0 и не затрагивает содержимое других регистров. Действие МНР в ответ на команду Z(0) обозначим через $r_n := 0$ (читается «r_n становится 0» или «r_n присваивается 0»).

Команда прибавления единицы. Для каждого $n > 0$ выполняется команда S(n). Результат применения команды состоит в увеличении на 1 содержимого регистра Rn. (Другие регистры не затрагиваются). В этом случае пишем $r_n := r_n+1$.

Команда переадресации. Для всех m, $n > 0$ имеется команда T(m, n). Ответом МНР на эту команду является замена содержимого регистра Rn содержимым регистра Rm, т.е. перенос числа r_m в регистр Rn. Другие регистры (включая Rm) не затрагиваются. Результат T(m, n) записываем как $r_n := r_m$.

Команда условного перехода. Для всех m, n, q имеются команды переадресации J(m, n, q). Встретив эту команду в программе, МНР сравнивает содержимое регистров Rm и Rn. Если $r_m = r_n$, то МНР переходит к выполнению команды, на которую указывает метка номер q; если метка с номером q отсутствует, МНР завершает работу. Если же $r_m \neq r_n$, МНР переходит к выполнению следующей по порядку команды программы (если таковая имеется).

На этом перечень типов МНР-команд закончен. Команды первых трех типов называются *арифметическими*.

Вычисления на МНР-машине начинаются с *начальной конфигурации* – последовательности чисел r_1, r_2, r_3, ..., содержащихся в регистрах до вычисления.. При этом предполагается, что существует n, такое, что в регистрах R1, ..., Rn содержатся любые натуральные числа, тогда как в регистрах R(n+1), R(n+2), ... содержатся одни нули.

МНР-программа – это конечный линейно упорядоченный набор команд перечисленных выше типов. Кроме того, программа может содержать метки вида Lq: ($q \in N$). За меткой может следовать какая-либо команда, но ее может и не быть.

Примером МНР-программы будет следующий линейно упорядоченный сверху вниз набор команд.

J(1,2,2)
L1: S(2)
S(3)
J(1,2,2)
J(1,1,1)
L2: T(3,1)

МНР начинает выполнение программы с первой команды. Выполнив очередную команду, если она не была командой условного перехода, МНР переходит к выполнению команды, расположенной ниже в наборе команд. Если выполняемая команда оказалась командой условного перехода $J(r_m, r_n, q)$ и $r_m \neq r_n$, то опять-таки МНР выполняет следующую по порядку команду. Если же $r_m = r_n$, МНР переходит к выполнению команды, на которую указывает метка q. МНР-вычисление *останавливается* тогда и только тогда, когда либо нет следующей команды в наборе команд (выполнена последняя команда в наборе); либо при выполнении команды условного перехода требуется перейти на отсутствующую метку или метку, за которой нет каких-либо команд. В случае остановки вычислений содержимое регистров r_1, r_2, r_3, ... называется *заключительной конфигурацией*. Вновь лишь конечное число регистров могут в заключительной конфигурации содержать ненулевые значения (почему?). Разумеется, вычисления могут и не оканчиваться.

Пусть a_1, a_2, a_3, ... – бесконечная последовательность натуральных чисел, содержащая конечное число отличных от нуля членов, π – программа. Через $\pi(a_1, a_2, a_3, ...)$ будем обозначать вычисления по программе π с начальной конфигурацией a_1, a_2, a_3, ...; запись $\pi(a_1, a_2, a_3, ...)\downarrow$ означает, что вычисление $\pi(a_1, a_2,$

$a_3, \ldots)$ в конце концов останавливается; наконец, запись $\pi(a_1, a_2, a_3, \ldots)\uparrow$ означает, что вычисление $\pi(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ никогда не останавливается. Часто говорят, что останавливающееся вычисление *сходится*, а никогда не останавливающееся – *расходится*. Так как и начальная, и заключительная конфигурации содержат лишь конечное число отличных от нуля членов, запись $\pi(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots)$ можно сократить до $\pi(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

§3. Вычислимые функции и разрешимые предикаты

Предположим, f – функция, определённая на натуральных числах. Что означает выражение «функция f вычислима на МНР»? Естественно представлять себе вычисление значения $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ как выполнение некоторой программы π с начальной конфигурацией $a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots$, т.е вычисление $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Если такое вычисление останавливается, условимся считать *результатом вычислений содержимое регистра* R1. Содержимое других регистров тогда будет содержать избыточную информацию. Если $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)\downarrow$ и после останова $r_1 = b$, то пишем $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)\downarrow b$ и говорим, что вычисление $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *сходится к* b. Если $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$ и $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)\downarrow b$, то ясно, что программа π правильно вычисляет значение функции f на аргументах $a_1, a_2, \ldots, a_n$. В случае, если f – частичная функция, значение которой не определено на $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то программа, вычисляющая f, не должна сходиться к какому-либо числу. Следовательно, должно иметь место $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)\uparrow$. Дадим теперь точное определение.

Программа π **МНР-вычисляет** f, *если для всех* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ *выполняются следующие утверждения*: *во-первых*, $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)\downarrow b$ *тогда и только тогда, когда* $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$, *и, во-вторых*, $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)\uparrow$ *тогда и только тогда, когда* $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *не определено*.

По определению, функция f является *МНР-вычислимой*, если существует программа π, которая МНР-вычисляет f.

Теперь можно ответить на вопрос, вычислима ли функция g из предыдущего параграфа. Ясно, что нет, поскольку g тотальна, но не существует программы π, которая МНР-вычисляет g.

Вернемся к первому и пока единственному примеру МНР-программы (также из предыдущего параграфа). Какую функцию она вычисляет? Оказывается, это частичная двухместная функция h, определенная следующим образом.

$$h(x,y) = \begin{cases} x-y, & \text{если } x \ge y \\ \text{в противном случае значение не определено} \end{cases}$$

Иными словами, эта функция осуществляет вычитание на множестве натуральных чисел.

Докажем утверждения об МНР-вычислимости некоторых других функций.

Функция x+y МНР-вычислима.

```
L1: J(3,2,0)
S(1)
S(3)
J(1,1,1)
```

Определим функцию −1(x) (вычитание единицы) следующим образом:

$$-1(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

Функция −1(x) МНР-вычислима.

```
J(1,4,0)
S(3)
L2: J(1,3,1)
S(2)
S(3)
J(1,1,2)
L1: T(2,1)
```

Определим функцию even(x):

$$\text{even}(x) = \begin{cases} x/2, & \text{если } x \text{ чётно} \\ \text{не определено, если } x \text{ нечётно} \end{cases}$$

Функция even(x) МНР-вычислима.

```
L1: J(1,2,2)
S(3)
S(2)
S(2)
J(1,1,1)
L2: T(3,1)
```

Разумеется, программы из приведенных примеров не являются единственными программами, вычисляющими рассмотренные функции.

Пусть R(x1,x2,...,xn) – n-местный предикат и f_R – n-местная функция, определенная следующим образом:

$$f_R(x1,\ldots,xn) = \begin{cases} 1, \text{ если } R(x1,\ldots,xn) \text{ истинно} \\ 0, \text{ если } R(x1,\ldots,xn) \text{ ложно} \end{cases}$$

Функция f_R называется *характеристической функцией* предиката R. Предикат R называется *разрешимым*, если его характеристическая функция f_R МНР-вычислима; в противном случае предикат R *неразрешим*.

Например, одноместный предикат (т.е. свойство) «x = 0» разрешим. Действительно, его характеристическая функция g(x) имеет вид:

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = 0 \\ 0, \text{ если } x \neq 0 \end{cases}$$

Функцию g вычисляет следующая простая программа.

```
J(1,2,1)
J(1,1,2)
L1: S(2)
L2: T(2,1)
```

Попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

1. Напишите МНР-программы для вычисления следующих функций:
   (a) f(x) = 0, если x = 0; в противном случае f(x) = 1;
   (b) f(x) = 5;
   (c) f(x, y) = 0, если x = y; в противном случае f(x, y) = 1;
   (d) f(x, y) = 1, если x > y; в противном случае f(x, y) = 0.
2. Покажите, что *команда переадресации является избыточной в определении* МНР.
3. Докажите, что следующие предикаты разрешимы:
   (a) "x < y";
   (b) "x ≠ 3";
   (c) "x чётно".

Значение введённых понятий и конструкций заключается в следующем. Оказалось, что все попытки уточнить понятие вычислимости приводят к эквивалентным результатам. Так, понятие МНР-вычислимости эквивалентно любому другому уточнённому понятию вычислимости. В частности, понятию вычислимости на так называемых машинах Тьюринга. Опираясь на этот факт, А.Чёрч выдвинул до сих пор никем не опровергнутый тезис, носящий его имя, согласно которому *всё, что вычислимо с интуитивной точки зрения, вычислимо и в смысле уточнённого понятия вычислимости, и, наоборот, всё, что вычислимо в уточнённом смысле, вычислимо и интуитивно*. Видимо, интуитивное понятие вычислимости сформировалось в математике и логике так, что оно не допускало двусмысленных толкований. Поэтому разнообразные и порой очень не похожие друг на друга уточнения этого понятия и оказались эквивалентными.

Следствием тезиса Чёрча будет вывод: *любая функция f будет вычислима тогда и только тогда, когда f МНР-вычислима*. Таким образом, результаты *любого* вычисления могут быть повторены на МНР-машине. Например, вычисления любого физически существующего компьютера может повторить (своими средствами) МНР-машина. На самом деле МНР-машина мощнее всех существующих в мире компьютеров вместе взятых! Ведь она обладает бесконечной памятью и не имеет никаких ограничений во времени выполнения программ, в отличие от реальных компьютеров, существенно ограниченных по памяти и во времени.

Поскольку, в силу результата задачи 2, *команда переадресации является избыточной в определении* МНР, для проведения любого вычисления (при наличии необходимого количества времени и памяти) достаточно всего лишь трёх команд: обнуления, прибавления единицы и условного перехода. Все остальные вычислительные операции, сколь бы сложны они ни были, сводимы к этим трём. Если кто-то считает, что человеческое мышление — это всего лишь вычислительный процесс, то он должен быть готов принять вывод о том, что все операции мозга редуцируются к последовательностям команд трёх типов. Если же, напротив, кто-то видит в психике нечто большее, чем вычисление, он не должен считать компьютер мыслящим, ибо компьютер способен только вычислять.

ГЛАВА 8. ВОПРОСНО-ОТВЕТНЫЕ СИТУАЦИИ

Эта глава посвящена краткому рассмотрению вопросов о самих вопросах. В первых двух параграфах изложение будет носить неформальный характер, т.к. контексты вопросов относятся, как мы видели, к интенсиональным контекстам, в связи с чем построение адекватной формальной теории вопросов (не важно, аксиоматической или генетической) оказывается сложным делом. Однако в последнем параграфе будет продемонстрирован фрагмент такой теории применительно к вопросам о точно определённых свойствах.

§1. Вопросы и ответы

Знак вопроса «?» — это действительно знак. Однако формально строго определить конструкцию его денотата ещё сложнее, чем в случае с кванторами. Поэтому приходится ограничиться лишь содержательными пояснениями. Прежде всего, **вопрос** — *это не до конца определённая инструкция по поиску высказываний. Если высказывание найдено в соответствии с этой инструкцией*, *то оно называется* **ответом** *на данный вопрос*. Так что дело вовсе не в том, использован ли в вопросе пресловутый знак вопроса «?». Гораздо важнее, чтобы соответствующая инструкция действительно была дана. Ведь если такой инструкции нет, то нет и самого вопроса, даже если использован его знак.

Например, выражение «Найдите теорему исчисления высказываний, которая короче аксиомы консеквента» по своей сути является вопросом, хотя не содержит вхождения символа «?». Кстати говоря, всегда можно переформулировать вопрос, снабдив его знаком «?». В данном случае то же самое можно спросить иначе: «Какова теорема исчисления высказываний, которая короче аксиомы консеквента?». Это хороший вопрос, потому что он достаточно подробно инструктирует нас, о том, где искать, и что именно искать. Однако, как и положено в вопросах, эта инструкция не до конца определяет процедуру поиска, так что на автоматический успех рассчитывать не приходится. Как известно, ответом на данный вопрос является высказывание «Теорема исчисления высказываний $\vdash (A \to A)$ короче аксиомы консеквента».

А будет ли высказывание «Теорема исчисления высказываний $\vdash (A \to B)$ короче аксиомы консеквента» ответом на поставленный вопрос? Поразмыслив, мы должны признать, что будет, поскольку это высказывание найдено именно в соответствии с инструкцией: оно говорит о теореме исчисления высказываний, оно приводит эту теорему, оно утверждает, что теорема короче аксиомы консеквента и т.д. Чем же не ответ? Другое дело, что это ответ *ложный*, тогда как первый ответ был *истинным*. Поскольку ответы — это высказывания, нет ничего удивительного, что ответы могут быть истинными или ложными.

Будет ли высказывание «В огороде бузина, а в Киеве дядька» ответом на тот же вопрос? Разумеется, нет, поскольку данное высказывание (если это вообще высказывание) совершенно игнорирует полученную инструкцию.

Требование, чтобы вопрос был не до конца определённой инструкцией, продиктовано как интуицией, так и прагматическими соображениями. С интуитивной точки зрения, что это за вопрос, если ответ на него получается автоматически? Зачем тогда вообще задавать вопрос? С прагматических позиций, не надо задавать людям вопросы, ответы на которые и вы, и они заведомо знают. К чему тогда вам и им инструкция по поиску ответа?

Например, попробуйте задать взрослому человеку вопрос «Сколько будет дважды два?» Скорее всего, он либо решит, что вы шутите, либо подумает, что вы хотите над ним поиздеваться. Не отвечает обсуждаемому требованию и вопрос «Найдите число $x = 2^8$, если известно, что $x = 256$». Но если известно, чему равен x, то что тут искать?

Так называемые *риторические вопросы* не являются инструкциями по поиску ответов, и поэтому, строго говоря, вообще не являются вопросами в логическом смысле этого слова. По логической сути, это утверждения, и эта суть не меняется от того, что произнесены они с вопросительной интонацией.

Вопросы делят на разные виды по разным основаниям. Если все возможные ответы перечислены в самой формулировке вопроса, то такой вопрос называется *закрытым*. К закрытым относятся вопросы, требующие ответа «да» или «нет». Закрытые вопросы социологи часто включают в свои анкеты. Вопросы «Есть ли жизнь на Марсе?» и «Как вы относитесь к деятельности правительства (всецело одобряете, скорее одобряете, скорее не одобряете, совершенно не одобряете)?» — это закрытые вопросы.

Вопрос называется *открытым*, если возможные ответы на него не зафиксированы в самом вопросе. Вопросы «Который час?», «Как Вас зовут?», «Когда произошло Бородинское сражение?», «Кто был создателем логики?» — всё это открытые вопросы. Некоторые могут подумать, что вопрос «Который час?» является закрытым, поскольку часов в сутках всего 24. Однако этот факт никак не отражён в формулировке вопроса. Напротив, вопрос «Сейчас десять, одиннадцать, или уже двенадцать?» будет закрытым по формулировке, хотя в нём не перечислены все фактически возможные альтернативы.

Важным с логической и прагматической точек зрения является разделение вопросов на *корректные* и *некорректные*, о чём пойдёт речь в следующем параграфе.

Ответы, помимо того, что их можно разделить на истинные и ложные, ещё делят на неполные, полные (или исчерпывающие) и сверхполные. Ответ будет *неполным*, *полным (исчерпывающим)* или *сверхполным*, если в нём содержится, соответственно, меньше, не меньше и не больше, или больше информации, чем запрашивалось. Если в ответ на вопрос «Кто был создателем логики?» последовало «Точно не женщина», то это истинный, но крайне неполный ответ. Высказывание «Создателем логики был кто-то из древних греков» получше справляется с задачей, но всё ещё неполно. Исчерпывающий ответ — высказывание «Создателем логики был Аристотель». Если же начинают добавлять, что это тот самый Аристотель, который был учителем Александра Македонского, который сказал, что «Платон мне друг, но истина дороже» и т.д. и т.п., то перед нами явно сверхполный ответ. Разумеется, следует стремиться к исчерпывающим ответам, избегая указанных крайностей.

Ответы ещё бывают прямые и косвенные. Назовём ответ *косвенным*, если он требует преобразования сообщённой в ответе информации. В противном случае ответ будет *прямым*. Например, в качестве ответа на предыдущий вопрос могло последовать: «Создателем логики был самый талантливый ученик Платона». Поскольку у Платона действительно был такой ученик, описательное имя «Самый талантливый ученик Платона» и собственное имя «Аристотель» указывают на одного и того же индивида. Поэтому согласимся, что перед нами истинный и полный ответ, но он явно косвенный, т.к. требует преобразования описательного имени в имя собственное. Ответ «Создателем логики был Аристотель» будет не только полным, но и прямым. Ещё один пример. Предположим, в ответ на вопрос «Сколько байт в килобайте?» получен ответ: «В килобайте 2^{10} байт». Ответ истинный и полный, но он опять косвенный, ибо требует выполнения операции возведения в степень. Поскольку 2^{10} = 1024, истинный, полный и прямой ответ на поставленный вопрос таков: «В килобайте 1024 байт».

Вместо слова «вопрос» часто используют слова «задача» и «проблема». Обычно проблемой называют вопрос, на который трудно получить ответ. Но эти три слова отнюдь не всегда используются в выше определённом смысле понятия «вопрос». Так, мы назовём вопросом и ответом выражения «Мне повернуть налево или направо?» и «Поверните налево». Но это не вопрос и не ответ с позиции принятого нами определения. Действительно, первое выражение не является инструкцией по поиску высказываний, а второе не является высказыванием. Обозначенный аспект вопросно-ответных ситуаций относится к *логике императивов*, проблематику которой здесь приходится оставить в стороне.

§2. Некорректные вопросы

Мы хотим развеять широко распространённое заблуждение, согласно которому нет ничего проще, чем задать вопрос. Не только к ответам, но и к вопросам предъявляют определённые требования. Главное требование к вопросу – это требование корректности. *Вопрос называется* **корректным**, *если на него существует нетривиальный истинный ответ. Вопрос называется* **некорректным**, *если он либо тривиален, либо не имеет истинного ответа.*

Иными словами, есть два типа некорректности. Первый связан с тривиальностью, второй – с отсутствием истинного ответа. Первый тип некорректности – *тривиальные* вопросы. Выше мы фактически обсудили ситуацию с тривиальными вопросами, так что ограничимся следующим замечанием. Тривиальность или не тривиальность вопроса зависит и от того, кто спрашивает, и от того, кто отвечает. Ребёнок имеет право задать вопрос, который для взрослого тривиален, если этот вопрос не тривиален для ребёнка. Но и взрослый может задать ребёнку тривиальный вопрос, если для ребёнка поиск ответа – не тривиальная задача. Приходится признать, что понятие тривиальности имеет не теоретический, а прагматический характер. Теоретически отличить тривиальный вопрос от нетривиального по свойствам самого вопроса как такового невозможно. Правда, иногда выделяют так называемые *тавтологические* вопросы, которые строятся по схеме «А есть А?». Например, «Является ли Сократ Сократом?», «Волк – это волк или нет?» «Вы это или не вы?» и т.п. Тавтологические вопросы в принципе можно распознать по их собственным признакам. Но, во-первых, тавтологические вопросы не исчерпывают всех случаев тривиальности, и, во-вторых, для всех ли они тривиальны? Возможно, кому-то вначале надо будет объяснить смысл закона тождества, прежде чем объявлять тавтологические вопросы тривиальными.

Второй тип некорректности подразделяют ещё на несколько видов. Первым видом будут бессмысленные вопросы. Назовём вопрос *бессмысленным*, если множество ответов на него пусто. Поскольку рассматриваемый тип некорректности связан с пустотой множества истинных ответов, можно было бы сказать, что в случае бессмысленных вопросов пуста также область ложных ответов. На вопросы «Действительно ли бесцветные зелёные идеи яростно спят?», «За что тебя будланули и теперь кудрячат?» «Сколько раз упала абракадабра?»нельзя дать не только истинного, но и ложного ответа. Вряд ли бессмысленные вопросы приносят большой вред, поскольку, как правило, их вовремя распознают и отвергают.

Второй вид некорректности – неопределённые вопросы. Вопрос является *неопределённым*, если не указано множество ответов. В этом случае непонятно, какие высказывания считать ответами, не говоря уже о выделении истинных ответов. Когда в вопросе используются слова с неясным или двусмысленным значением, инструкция по поиску ответа ведёт в никуда. На практике вред от неопределённых вопросов весьма существенен, т.к. отвечающие далеко не всегда замечают (в отличие от предыдущего случая), что имеют дело с этой разновидностью некорректности.

Предположим, к вам без всяких предварительных объяснений обратились с единственным вопросом: «Вы за реформы в России или против?». На первый взгляд, вопрос как вопрос, и выглядит он вполне пристойно. Но это только на первый взгляд. Что имеется в виду – реформы, которые уже осуществлены, или будущие реформы? Ведь можно, например, быть сторонником будущих реформ и отвергать уже проведённые. Более того, в действительности вам даже не разъяснено, что спрашивающий понимает под словом «реформа». В социологии реформами называют преобразования отдельных социальных институтов, нередко в значительные исторические сроки. Для обозначения преобразования всего общества за короткое время есть другой термин – социальная революция. С этой точки зрения, в России в начале 90-х годов произошла настоящая революция, а не проведены какие-то там реформы.

Однако, в отличие от бессмысленных вопросов (которые просто должны быть отброшены), неопределённые вопросы поддаются коррекции. Некоторые полагают, что отвечающий ни при каких обстоятельствах не должен отвечать вопросом на вопрос. Это не так. Столкнувшись с неопределённостью вопроса, отвечающий имеет право задать *уточняющий вопрос*. Если неопределённость в результате ликвидирована, можно приступать к поиску ответа на уточнённый первоначальный вопрос.

Самой вредной и неприятной разновидностью некорректности являются провокационные вопросы. Прежде, чем определить этот вид, обратим внимание на очень важный аспект семантики вопросов. Денотат вопроса не сводится к инструкции по поиску ответа. Ещё одной компонентой семантического значения осмысленного вопроса является непустое множество высказываний, истинность которых утверждается самим вопросом. Высказывание из этого множества называется *пресуппозицией вопроса*, а само множество – *множеством пресуппозиций* данного вопроса. (Вместо термина «пресуппозиция» используют ещё слово «предпосылка».) Например, пресуппозициями вопроса «Как зовут твоего друга?» являются высказывания «У тебя есть друг» и «У друга есть имя», а также все следствия из них. Пресуппозицией вопроса «Ты дома или на работе?», заданного по мобильному телефону, будет высказывание «Ты дома или на работе, но не то и другое вместе». И т.д.

Спрашивающий нечто утверждает – вот важнейший вывод логики. Недаром говорят, что в науке правильно поставленная проблема есть уже половина теории. Бывает даже, что легче найти ответ на вопрос, чем сформулировать сам вопрос. Какой-то математик заявил: «Дайте мне математическую теорему, а уж я её докажу». Вывод из сказанного очевиден: задать вопрос – дело нелёгкое и ответственное. Поставить интересный вопрос столь же сложно, как и высказать глубокое утверждение. Поэтому, если вы не терпите досужих разговоров и пустопорожних высказываний, вы не должны позволять кому попало задавать себе вопросы. И раз уж мы прибегли к афоризмам, перефразируем одно известное выражение: *Скажи, кто задаёт тебе вопросы, и я скажу, кто ты*!

Уже одно существование провокационных вопросов делает не лишними разумные меры предосторожности против спрашивающих. Ведь *вопрос называется* **провокационным**, *если некоторые из его пресуппозиций ложны*. Древнегреческий софист задал вопрос: «Перестал ли ты бить своего отца?». Это закрытый «ли» вопрос, требующий выбора ровно одной из двух предложенных в формулировке вопроса альтернатив: «Да, перестал» или «Нет, не перестал». Но ясно, что пресуппозицией данного вопроса является высказывание «Раньше ты своего отца бил», которое при обращении к порядочному человеку является вопиющей ложью, в результате чего сам вопрос становится провокационным. Это пример намеренной провокации, но провокационная ситуация может быть создана и без вины спрашивающего. В фильме «Чапаев» крестьянин спрашивает знаменитого командира: «Вы за большевиков, али за коммунистов?». Пресуппозицией данного вопроса является высказывание «Большевики и коммунисты – разные люди», но в условиях того времени понятия «большевик» и «коммунист» совпадали, в результате чего пресуппозиция должна быть оценена как ложная, а вопрос – как провокационный. Правда, Василий Иванович на провокацию не поддался, заявив: «Я за Третий интернационал». Но в любом случае это не ответ на поставленный крестьянином вопрос.

Обратите внимание: *при обсуждении явления некорректности лишь в случае тривиальных вопросов ссылку на субъектов вопросно-ответной ситуации устранить не удалось; в остальных случаях дана объективная характеристика некорректности*. Пустота множества ответов (бессмысленные вопросы), отсутствие указания на множество ответов (неопределённые вопросы), ложность некоторых пресуппозиций (провокационные вопросы) – всё это характеристики самих вопросов как знаков, но не характеристики задавших эти вопросы людей. Это лишний раз подчёркивает то обстоятельство, что современная логика является не одной из наук о человеке, а одной из наук о преобразованиях информации.

§3. Проблема разрешимости вопросов

Пусть U − непустое множество (универсум) и A является подмножеством U (символически $A \subset U$). Предположим, удалось кодировать универсум U. A называется *разрешимым* множеством (Р-*множеством*), если существует МНР-программа π, которая, получив на входе код $a \in U$, обязательно заканчивает работу с результатом $r_1 = 1$, если $a \in A$, или $r_1 = 0$, если $a \notin A$ (программа с такими свойствами будет, по определению, *разрешающей* программой для A). Назовем A *полуразрешимым* множеством (П-*множеством*), если существует МНР-программа π, которая, получив на входе код $a \in U$, в случае $a \in A$ закончит работу с результатом $r_1 = 1$; если же $a \notin A$, π попадает в бесконечный цикл (программа с такими свойствами будет *полуразрешающей* для A). Наконец, назовем A *неразрешимым* множеством (Н-*множеством*), если A не является ни разрешимым, ни полуразрешимым множеством (в этом случае соответствующих программ просто нет). Если π − разрешающая или полуразрешающая множество A программа, то π будет и *перечисляющей* программой, поскольку она действительно перечисляет элементы из А и только их.

Примеры.

Р). Множества чётных, нечётных и простых натуральных чисел разрешимы; множества законов, выполнимых и противоречивых формул логики высказываний разрешимы. Так как для этих множеств имеются всем известные алгоритмы определения того, попадет или нет натуральное число или формула логики высказываний в соответствующее множество, по тезису Черча эти алгоритмы могут быть записаны в виде МНР-программ.

П). Множество логически истинных высказываний исчисления предикатов первого порядка (т.е. высказываний, истинных в каждом универсуме) полуразрешимо. Отсюда следует, что множество противоречивых высказываний логики предикатов также полуразрешимо: поскольку если А противоречиво, то ¬А логически истинно; теперь достаточно применить полуразрешающую программу для логически истинных формул и ждать появления ¬А. Как только оно появится, делаем вывод о том, что А противоречиво. Таким образом, перечисляя логически истинные высказывания, мы косвенным образом перечисляем и противоречия. Однако оба эти множества не являются разрешимыми, что составляет один из самых философски значимых результатов логики.

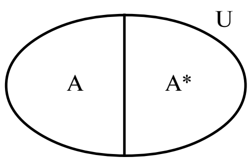
Н). Множество арифметических истин (множество утверждений первого порядка, истинных в универсуме натуральных чисел N) неразрешимо. Этот результат является следствием знаменитых теорем Геделя и также, как и предыдущий, имеет фундаментальное значение для философии.

Будем использовать записи Р(*А*), П(*А*) и Н(*А*) для указания на разрешимость, полуразрешимость и неразрешимость множества *А* соответственно. Очевидно, что свойство Н исключает два других, то есть Н(*А*) влечет ¬Р(*А*) и ¬П(*А*). Однако свойства Р и П не исключают друг друга, что мы увидим ниже.

Через *А** будем обозначать теоретико-множественное *дополнение А* (до универсума U), как показано на следующем рисунке.

Теорема. Если П(*А*) и П(*А**), то Р(*А*) и Р(*А**).

Неформальное доказательство состоит в следующем. Пусть π и π′ – МНР-программы, полуразрешающие множества *А* и *А** соответственно. Возьмем произвольное *а*∈U и подадим его на вход программ π и π′, то есть вычислим π(*а*) и π′(*а*). Для *А* возможны только два случая: *а* ∈ *А* и *а* ∉ *А*. В первом случае вычисление π(*а*) остановится, во втором случае остановится вычисление π′(*а*), и мы имеем алгоритм для распознавания принадлежности элемента *а* множеству *А*.



В соответствии с тезисом Черча, имеется программа α, разрешающая множество *А*. Совершенно так же доказывается разрешимость множества *А** (достаточно рассмотреть случаи *а* ∈ *А** и *а* ∉ *А**).

Приведем простой пример, иллюстрирующий только что доказанную теорему. Пусть U – множество всех упорядоченных пар натуральных чисел и *А* – множество пар <x, y> из U таких, что x > y. Тогда дополнение *А** множества А до универсума U будет составлено из пар <x, y> таких, что x ≤ y.

Рассмотрим следующую МНР-программу π.

Начальная конфигурация: x, y, 0, 0, 0 ...

```
L1:     S(2)
        J(1,2,2)
        J(1,1,1)
L2:     Z(1)
        S(1)
```

Программа π прибавляет по единице к y до тех пор, пока он не сравняется с x. Если это произойдет (а это произойдет когда-нибудь при x > y), первый регистр обнуляется и туда помещается единица; в противном случае (если изначально было $x \le y$) програма никогда не завершит работу. Очевидно, π полуразрешает множество A и, следовательно, A — полуразрешимое множество.

Рассмотрим еще одну МНР-программу π'.

Начальная конфигурация: x, y, 0, 0, 0 ...

```
        J(1,2,2)
L1:     S(1)
        J(1,2,2)
        J(1,1,1)
L2:     Z(1)
        S(1)
```

Программа π' завершает работу при $x \le y$ и попадает в бесконечный цикл в противном случае (при $x > y$), полуразрешая множество A^*. Следовательно, A^* — полуразрешимое множество. По теореме, множества A и A^* разрешимы. Теорема доказана нами без указания явного способа построения разрешающих программ для этих множеств. Однако в данном конкретном случае легче напрямую доказать разрешимость множества A и, соответственно, множества A^*.

Таким образом, свойства Р и П друг друга не исключают. При этом существенно, что не всякое полуразрешимое множество является разрешимым.

Но обратное верно: всякое разрешимое множество одновременно является и полуразрешимым. Чтобы убедиться в сказанном, достаточно рассмотреть два случая. Во-первых, множество A может совпадать с универсумом U. Тогда разрешающая программа является вместе с тем и полуразрешающей и ничего больше делать не надо. Во-вторых, A может не совпасть с U. Тогда для $a \notin A$ разрешающая программа π завершит работу с $R_1 = 0$. Возможны три способа остановки: переход на отсутствующую следующую команду, переход к отсутствующей метке и переход к метке, за которой нет команды. Необходимо привести программу π к *стандартному* виду. По определению это означает, что в ней больше нет переходов к отсутствующим меткам и меткам, за которыми нет команды за, быть может, тем исключением, что метка без команды стоит в программе последней (то есть за ней нет других инструкций). Сделать программу стандартной легко: достаточно в тексте программы ссылки на несуществующую метку или метку без команды заменить на переход к метке без команды, стоящей последней (если такой метки нет, ее следует ввести). Очевидно, что стандартизированная программа π' будет делать то же самое, что и исходная программа π. Теперь допишем программу π' следующим образом (поставив первую дописанную команду за последней меткой, если таковая имеется).

π' (без последней метки, если таковая имеется)
Li: Z(2) (Li последняя метка π', но Li может отсутствовать)
S(1)
J(1,2,j) (где j – индекс, отсутствующий в π')
Lk: J(1,1,k)(k отсутствует в π' и $k \neq j$)
Lj:

Ясно, что стандартная программа π', эквивалентная исходной программе π, завершит работу либо потому, что выполнена ее последняя команда, либо потому, что произошел переход на последнюю метку Li. В любом случае после завершения разрешающей программы π' будет либо $R_1 = 1$, либо $R_1 = 0$. При $R_1 = 1$ после выполнения двух первых добавочных команд будет $R_2 = 1$ и по команде J(1,2,j) программа завершит работу. Но если $R_1 = 0$, ввиду $R_2 = 1$ перехода по команде J(1,2,j) не последует и программа перейдет к выполнению команды Lk: J(1,1,k), которая приводит к зацикливанию. Таким образом, полученная расширенная программа является полуразрешающей, что и требовалось.

Упомянутые и полученные результаты позволяют установить, что множество выполнимых (т.е. истинных в одном или более универсумах) высказываний логики предикатов первого порядка неразрешимо. Для него, в отличие от множества логически истинных высказываний, не существует даже полуразрешимой процедуры перечисления. Докажем этот важнейший теоретико-познавательных факт. Допустим, что множество выполнимых высказываний полуразрешимо. Его дополнением является множество противоречивых высказываний логики предикатов, которое, как было установлено, является полуразрешимым. По теореме, множество противоречивых высказываний тогда разрешимо, что противоречит упоминавшемуся результату о том, что это множество не является разрешимым. Итак, множество выполнимых высказываний первопорядковой логики предикатов неразрешимо.

Сказанное выше позволяет связать все точно сформулированные вопросы о наличии свойств у индивидов с разрешимостью, полуразрешимостью или неразрешимостью денотатов этих свойств. *Назовём проблему* Q(x)? **разрешимой (полуразрешимой, неразрешимой)**, *если денотат свойства* Q(x) *разрешим* (*полуразрешим, неразрешим*).

(1) Вопрос «Является ли формула А теоремой исчисления высказываний P_N?» является разрешимым. (2) Вопрос «Является ли формула А теоремой исчисления предикатов K_N?» полуразрешим, но не разрешим. (3) Вопрос «Является ли формула А истинной в универсуме натуральных чисел?» неразрешим.

На вопрос (1) по каждой формуле логике высказываний можно ответить либо «да», либо «нет». На вопрос (2) в общем случае (т.е. в случае произвольных формул) можно получить лишь ответ «да», но ответа «нет» мы рискуем не дождаться. Наконец, на вопрос (3) в общем случае не существует ни утвердительного, ни отрицательного ответа. Конечно, нам известно много примеров конкретных формул, не являющихся теоремами исчисления предикатов или примеров формул, истинных в универсуме N. Но у нас нет и принципиально не может быть эффективного вычислительного метода, позволяющего перечислить все формулы, не являющиеся теоремами логики предикатов, или все истинные формулы арифметики.

Таким образом, логика наложила запрет на идею автоматического решения даже точно сформулированных теоретических проблем. Мечта Г.Лейбница о том времени, когда учёные свои споры будут разрешать вычислениями, оказалась несбыточной. Но здесь заключён отнюдь не только негативный аспект. Полученные в логике ограничительные теоремы являются строгим обоснованием неустранимости творческого начала в теоретической науке.

До сих пор мы рассматривали машины, функционирование которых однозначно определялось шаг за шагом выполнением соответствующих столь же однозначно определённых операторов. Такие машины являются *детерминированными*. *Недетерминированные* машины – это те же детерминированные, дополненные устройством (иногда его называют *оракулом*), которое способно без вычислений правильно угадывать некоторые результаты. Например, снабдим детерминированную машину оракулом, способным верно угадывать строчку в таблице истинности, на которой заданная формула логики высказываний истинна. Дальнейшие уже детерминированные вычисления в явном виде продемонстрируют, что это действительно строка, выполняющая формулу.

Вы можете сказать, что поскольку проверка формул логики высказываний на выполнимость осуществляется алгоритмически, то по тезису Черча существует соответствующая детерминированная программа, решающая ту же самую задачу. Но все дело в скорости вычислений. Детерминированной машине в общем случае потребуется проверить 2^n строк[11] (где n – число переменных в формуле), а на это потребуется много времени даже при сравнительно небольших n. Зато недетерминированной машине, снабженной оракулом, достаточно проверить лишь одну строку или сразу выдать сообщение, что нужных строк нет. Однако следует согласиться, что в принципе (отвлекаясь от ресурсных ограничений) в данном случае то, что делает недетерминированная машина, может сделать и детерминированная.

Но мы можем пойти дальше, вообразив себе оракул, способный всегда правильно угадывать, будет ли формула теоремой первопорядковой логики предикатов. Так как множество таких формул лишь полуразрешимо, но не является разрешимым, заменить оракул детерминированной машиной невозможно в принципе. Этот оракул, так сказать, «проникновеннее» своего предыдущего коллеги. И уж совсем божественным будет выглядеть дар оракула, который будет обладать способностью безошибочно угадывать принадлежность элемента неразрешимому множеству, например, множеству выполнимых формул первопорядковой логики.

Таким образом, выстраивается иерархия недетерминированности, которую можно представить в следующих терминах: *слабая, средняя* и *сильная* недетерминированность (или, если угодно, слабые, средние и сильные оракулы). Слабая недетерминированность может быть ликвидирована детерминированным устройством. Но уже средняя недетерминированность не допускает такой редукции к детерминизму. Ещё более мощной является сильная недетерминированность, которая не по зубам даже оракулам из средней зоны.

Может возникнуть вопрос, зачем недетерминированной машине нужна детерминированная часть наряду с оракулом, коль скоро известно, что он выдает правильный ответ? Дело в том, что в ряде случаев нас интересует не только ответ на вопрос, но и само решение задачи. Представим себе, что мы располагаем оракулом средней силы, который по предъявленной формуле исчисления предикатов первого порядка выдает ответ, будет ли она теоремой или не будет. Если ответ «нет», то он исчерпывающий. Если же «да», то было бы интересно взглянуть на доказательство. В этом случае запускается детерминированная часть машины с программой, которая полуразрешает множество логически истинных формул логики предикатов, осуществляя построение соответствующих доказательств. Имея положительный ответ оракула, мы рано или поздно получим требуемое доказательство — ведь теперь мы точно знаем, что наша формула является теоремой. Без оракула этого знания у нас нет, поэтому будет существовать опасность либо ждать бесконечно долго (что невозможно), либо выключить машину, оставаясь в сомнениях по поводу того, не сделано ли это преждевременно.

Можно привести и другие примеры, когда неконструктивные предсказания оракула желательно подтвердить конструктивно, явно предъявив требуемое доказательство или построение. Лишь в случае сильно недетерминированных машин их детерминированная часть может оказаться ненужной в ситуации, когда искомое множество неразрешимо. Что, например, мы могли бы потребовать от детерминированной машины, если оракул ответил, что некоторая формула логики предикатов выполнима, но не является общезначимой — явно предъявить модель? А если эта формула выполняется только в бесконечных областях? Если так, то неразумно надеяться получить явное построение модели, поскольку все, что может быть конструктивно построено, обязано быть конечным. Тем не менее, нелепо запрещать сильно недетерминированным машинам уметь решать задачи, доступные оракулам меньшей силы или детерминированным устройствам. Поэтому и у них должна иметься детерминированная часть.

Обескураживающий факт состоит в том, что ни на одном заводе по производству компьютеров ни сейчас, ни в обозримом будущем не видно и намёка на возможность создания даже оракула слабого типа, не говоря уже о двух оставшихся. Это выводит нас на проблемы, которые до сих пор плохо осознаются. В самом деле, есть основания полагать, что недетерминированные объекты в нашей Вселенной все же имеются.

Примечания

[1] Если чья-то интуиция молчит, то ничего страшного. Это традиционная логика во многом интуитивна, в то время как современная логика может быть изложена без ссылок на интуицию.

[2] См. предыдущее примечание.

[3] Согласно этому «закону», утверждающий S должен обосновать (доказать) S. В отличие от предыдущих законов, здесь мы имеем дело не с утверждением, а с *требованием.* Относить требования к законам логики нелепо, даже если эти требования разумны. Например, требование «Соблюдай законы логики!» вполне разумно, но оно всего лишь благое пожелание, а вовсе не закон.

[4] Напр., имеются современные реконструкции силлогистики. Но эти реконструкции проводятся методами и средствами современной логики и потому не могут считаться частью традиционной логики.

[5] Учёт фактора времени требует более изощрённой логической техники, о которой речь впереди. При изучении упорядоченных совокупностей мы дадим одну из возможных интерпретаций оборота «А и затем В».

[6] Правила вывода даются раньше, чем формулируется понятие вывода, поэтому порочного круга здесь нет.

[7] Со средневековых времён и до сих пор обсуждаются *принципы индивидуации*, т.е. теоретические критерии, на основании которых выделяются индивиды.

[8] См. диалог Платона «Евтидем».

[9] См. диалог Платона «Гиппий Больший».

[10] Не путать с индукцией как правдоподобным рассуждением, ведущим от частных посылок к общему заключению без гарантий истинности заключения.

[11] На самом деле это недоказанный факт, в истинности которого, однако, многие уверены, поскольку никому пока не удалось найти способ устранить экспоненту в задаче «выполнимость» (это один из аспектов знаменитой P-NP проблемы).

Оглавление

Научное издание

Анисов Александр Михайлович

СОВРЕМЕННАЯ ЛОГИКА

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

В авторской редакции
Художник *В.К.Кузнецов*
Технический редактор *А.В.Сафонова*
Корректура автора

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.98 г.
Подписано в печать с оригинал-макета 26.03.02.
Формат 60х84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 17,06. Уч.-изд. л. 15,76. Тираж 500 экз. Заказ № 004.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерный набор автора
Компьютерная верстка: *Ю.А.Аношина*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
119992, Москва, Волхонка, 14